张量环上的 Gorenstein AC- 投射模

陈晗钰
重庆师范大学 数学科学学院，中国·重庆 401331

摘　要：论文通过张量积的定义构造了张量环，刻画了张量环上的 Gorenstein AC- 投射模，其中该投射模的子范畴中的对象为表示范畴，再通过张量环的等价刻画研究了其性质。

关键词：张量环；Gorenstein AC- 投射模；表示范畴；Frobenius 范畴

Gorenstein AC-projective Modules on Tensor Rings

Hanyu Chen
Chongqing Normal, University School of Mathematical Sciences, Chongqing, 401331, China

Abstract: The paper constructs a tensor ring through the definition of tensor product and characterizes the Gorenstein AC projective module on the tensor ring, where the objects in the subcategory of the projective module are representation categories. The properties of this module are studied through equivalent characterization of tensor rings.

Keywords: tensor ring; Gorenstein AC-projective module; category of representations; Frobenius category

1 引言

1995 年，Enochs 和 Jenda[1] 引入了 Gorenstein 内射模和 Gorenstein 投射模的概念。2009 年，Ding、Li 和 Mao[2] 考虑了一类特殊的 Gorenstein 投射模与 Gorenstein 内射模；为了找到 Iwanaga-Gorenstein 环上的模的 Gorenstein 同调性质与任意结合环上的对应结果。2014 年，Bravo 等在文献 [3] 中引入了 absolutely clean 模和 level 模的概念。通过这两类模，学者们进一步引入了 Gorenstein AC- 投射模和 Gorenstein AC- 内射模的概念。

设 M 是一个幂零 R- 双模，$T_R(M)$ 为相应的张量环 [4]。张量环在环论、模论及代数表示论上都有重要应用，张量环模范畴上的同调性质的研究受到国内外学者广泛关注 [4-7]。Chen 与 Lu[5] 研究了张量环的 Gorenstein 同调性质，并给出了张量环上 Gorenstein 投射模的等价刻画。论文主要考虑张量环上 Gorenstein AC- 投射模的性质，刻画了张量环上 Gorenstein AC- 投射模。证明了如下结论：若 R 为任意环，M 为幂零 R- 双模。若对任意的 Gorenstein AC- 投射 R - 模 V 及 level R - 模 L，以及任意 $i \geq 0$，有：

$$\mathrm{Ext}_R^1(V, M^{\otimes_R i} \otimes_R L) = 0 = \mathrm{Tor}_1^R(M, M^{\otimes_R i} \otimes_R V)$$

且任意 level $T_R(M)$ - 模的内射维数有限，则以下等价：

①$\mathcal{GACP}mon(M \otimes_R -) = \mathcal{GACP}(T_R(M))$；

②对任意 $T_R(M)$- 模的 Gorenstein AC- 投射分解 $H^\bullet$，复形 $M \otimes_R H^\bullet$ 是正合的。

2 预备知识

论文中，环指有单位元的结合环。若无特别说明，所有模均为左模。首先回顾表示范畴的定义以及一些事实。

定义一 [8]：设 $\mathcal{A}$ 为加法范畴，$F: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 为加法自同态函子。形如 (X, u) 的对子作为对象构成的范畴为 F 的表示范畴，并记作 $\mathrm{Rep}(F)$。对象之间的态射 $f: (X, u) \to (Y, v)$ 为 $\mathcal{A}$ 中的态射且满足 $f \circ u = v \circ F(f)$，即满足如下交换图：

$$\begin{tikzcd} F(X) \arrow[r, "u"] \arrow[d, "F(f)"'] & X \arrow[d, "f"] \\ F(Y) \arrow[r, "v"'] & Y \end{tikzcd}$$

定义二 [5]：设 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 为幂零函子，即存在正整数 $n \geq 0$，使得 $F^{n+1} = 0$。记 $F^0 = \mathrm{Id}_{\mathcal{A}}$。对任意 $A \in \mathcal{A}$，令 $\mathrm{Ind}A = \oplus_{i=0}^{n} F^i(A)$，可自然地定义态射 $c_A: F\mathrm{Ind}A \to \mathrm{Ind}A$。对任意 $A \in \mathcal{A}$，$(\mathrm{Ind}A, c_A)$ 是 F 表示范畴中的对象。

由文献 [5] 可知，$\mathrm{Ind}A: \mathcal{A} \leftrightarrow \mathrm{Rep}(F): U$ 是伴随对，其中 U 表示遗忘函子，从而有自然同构。

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(F)}((\mathrm{Ind}A, c_A), (X, u)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, X)$$

定义三 [5]：若 $\mathcal{A}$ 为 Abel 范畴且自同态函子 F 为右正合的，则 $\mathrm{Rep}(F)$ 也为 Abel 范畴。此外，$\mathrm{Rep}(F)$ 中的序列 $0 \to (X, u) \to (Y, v) \to (Z, w) \to 0$ 是正合的当且仅当 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是范畴 $\mathcal{A}$ 中的正合序列。

下面回顾 Gorenstein AC- 投射模的概念和相应结论。

定义四 [3]：称模 V 是 Gorenstein AC- 投射模，如果存在投射 R- 模构成的正合序列：

$$P^\bullet = \cdots \to P^{-1} \to P^0 \to P^1 \to \cdots$$

使得 $V \cong \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$。并且对任意 level R- 模 L，用函子 $\mathrm{Hom}_R(-, L)$ 作用该序列后仍保持正合，称 $P^\bullet$ 为 V 的

超完全投射分解。记 $\mathcal{GACP}(R)$ 为所有 Gorenstein AC- 投射模构成的类。

最后，回顾张量环及张量环上的模的概念。

定义五[4]：设 M 是一个幂零 R- 双模，即存在正整数 $n \geq 0$，使得 $M^{\otimes_R (n+1)} = 0$。记 $M^{\otimes_R 0} = R$；称 $T_R(M) = \oplus_{i=0}^{\infty} M^{\otimes_R i}$ 为张量环。其中 $j \geq 0$ 时，$M^{\otimes_R (j+1)} = M \otimes_R (M^{\otimes_R j})$。

设 R 为任意环，M 为有限生成幂零 R- 双模。Chen 与 Lu[5] 证明了存在范畴同构：

$$\mathrm{Rep}(M \otimes_R -) \cong \mathrm{Mod}(T_R(M))$$

其中，$\mathrm{Mod}(T_R(M))$ 表示 $T_R(M)$- 模范畴。事实上，表示范畴 $\mathrm{Rep}(M \otimes_R -)$ 中的任意对象 (X,u)，都可以看作左 $T_R(M)$- 模，其中 $m \cdot x = u(m \otimes x)$，$\forall m \in M, x \in X$。特别地，对每个 R- 模 Z，都有 $(\mathrm{Ind}Z, c_Z)$ 和 $T_R(M)$- 模 $T_R(M) \otimes_R Z$ 的一一对应。每个投射 $T_R(M)$- 模都对应一个表示 $(\mathrm{Ind}P, c_P)$，其中 P 为投射 R- 模。

3 张量环上的 Gorenstein AC– 投射模

考虑以下 $T_R(M)$- 模的子范畴：

$$\mathcal{GACP}mon(M \otimes_R -) := \{(X,u) \in \mathrm{Rep}(M \otimes_R -) \mid u\text{为单同态且}\mathrm{Coker}u \in \mathcal{GACP}(R)\}$$

命题一：设 R 为任意环，M 为幂零 R - 双模。若对任意的 Gorenstein AC- 投射 R - 模 V 及 level R - 模 L，以及任意 $i \geq 0$，有：

$$\mathrm{Ext}_R^1(V, M^{\otimes_R i} \otimes_R L) = 0 = \mathrm{Tor}_1^R(M, M^{\otimes_R i} \otimes_R V),$$

则以下等价：

① $\mathcal{GACP}(T_R(M)) \subseteq \mathcal{GACP}mon(M \otimes_R -)$；

②对任意 $T_R(M)$- 模上的 Gorenstein AC- 投射分解 $H^\bullet$，复形 $M \otimes_R H^\bullet$ 是正合的。

证明① ⇒ ②：设 $H^\bullet = \cdots \to (\mathrm{Ind}P^{-1}, c_{P^{-1}}) \to (\mathrm{Ind}P^0, c_{P^0}) \to (\mathrm{Ind}P^1, c_{P^1}) \to \cdots$ 是超完全投射分解，其中 P^i 为投射 R- 模。故 $(X^i, u^i) = \mathrm{Ker}((\mathrm{Ind}P^i, c_{P^i}) \to (\mathrm{Ind}P^{i+1}, c_{P^{i+1}}))$ 是 Gorenstein AC- 投射 $T_R(M)$ - 模。由条件可知 $u^i : M \otimes_R X^i \to X^i$ 是单同态且 $\mathrm{Coker}u^i$ 是 Gorenstein AC- 投射 R- 模。考虑 R- 模的正合序列：$0 \to X^{i-1} \to \mathrm{Ind}P^{i-1} \to X^i \to 0$。设 $(X,u) \in \mathcal{GACP}mon(M \otimes_R -)$，可得以下 R- 模的正合序列：

$$0 \longrightarrow M \otimes_R X \xrightarrow{u} X \longrightarrow \mathrm{Coker}u \longrightarrow 0$$

由条件可知，$\mathrm{Tor}_1^R(M, M^{\otimes_R i} \otimes_R \mathrm{Coker}u) = 0$，因此序列：

$$0 \to M^{\otimes_R (i+1)} \otimes_R X \to M^{\otimes_R i} \otimes_R X \to M^{\otimes_R i} \otimes_R \mathrm{Coker}u \to 0$$

是正合的。由于 M 是幂零的，即 $M^{\otimes_R (n+1)} = 0$，故 $M^{\otimes_R n} \otimes_R X \cong M^{\otimes_R n} \otimes_R \mathrm{Coker}u$，从而 $\mathrm{Tor}_1^R(M, M^{\otimes_R n} \otimes_R X) = 0$。进而，由正合序列：

$$0 \to M^{\otimes_R (n+1)} \otimes_R X \to M^{\otimes_R n-1} \otimes_R X \to M^{\otimes_R (n-1)} \otimes_R \mathrm{Coker}u \to 0$$

可知，$\mathrm{Tor}_1^R(M, M^{\otimes_R (n-1)} \otimes_R X) = 0$。以此类推，可得 $\mathrm{Tor}_1^R(M, X) = 0$。因此，$0 \to M \otimes_R X^{i-1} \to M \otimes_R \mathrm{Ind}P^{i-1} \to M \otimes_R X^i \to 0$ 是正合的，即 $M \otimes_R H^\bullet$ 是正合的。

②⇒①：设 $(X,u) \in \mathcal{GACP}(T_R(M))$ 且 $H^\bullet$ 为 $T_R(M)$- 模上超完全投射分解。设 $H^i = (\mathrm{Ind}P^i, c_{P^i})$，其中 P^i 为投射 R- 模，则存在单同态 $\gamma : (X,u) \to H^0 = (\mathrm{Ind}P^0, c_{P^0})$。又由 $M \otimes_R H^\bullet$ 是正合的，可知 $M \otimes \gamma$ 为单同态。考虑以下交换图：

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "M\otimes_R\gamma"'] & X \arrow[d, "\gamma"] \\
M \otimes_R \mathrm{Ind}P^0 \arrow[r, "c_{P^0}"'] & \mathrm{Ind}P^0
\end{tikzcd}$$

显然，u 为单同态。接下来证明 $\mathrm{Coker}u \in \mathcal{GACP}(R)$。考虑以下行列正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
\cdots \arrow[r] & M \otimes_R \mathrm{Ind}P^{-1} \arrow[r, "M\otimes_R d_{-1}"] \arrow[d, "c_{P^{-1}}"] & M \otimes_R \mathrm{Ind}P^0 \arrow[r, "M\otimes_R d_0"] \arrow[d, "c_{P^0}"] & M \otimes_R \mathrm{Ind}P^1 \arrow[r] \arrow[d, "c_{P^1}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Ind}P^{-1} \arrow[r, "d_{-1}"] \arrow[d] & \mathrm{Ind}P^0 \arrow[r, "d_0"] \arrow[d] & \mathrm{Ind}P^1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathrm{Coker}c_{P^{-1}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}c_{P^0} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Coker}c_{P^1} \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

显然有 $\mathrm{Coker}c_{P^i} \cong P^i$ 为投射 R- 模且 $\mathrm{Coker}u \cong \mathrm{Ker}(P^0 \to P^1)$。注意到对任意 level R- 模 L，$T_R(M) \otimes_R L$ 是 level $T_R(M)$- 模。由于：

$$T_R(M) \otimes_R P^\bullet = \cdots \to T_R(M) \otimes_R P^{-1} \to T_R(M) \otimes_R P^0 \to T_R(M) \otimes_R P^1 \to \cdots$$

是 $T_R(M)$- 模上超完全投射分解，则：

$$\mathrm{Hom}_{T_R(M)}(T_R(M) \otimes_R P^\bullet, T_R(M) \otimes_R L) \cong \mathrm{Hom}_R(P^\bullet, \mathrm{Hom}_{T_R(M)}(T_R(M), T_R(M) \otimes_R L)) \cong \mathrm{Hom}_R(P^\bullet, T_R(M) \otimes_R L)$$

是正合的。又因为 L 为 $T_R(M) \otimes_R L$ 的直和项，故 $\mathrm{Hom}_R(P^\bullet, Q)$ 也是正合的。因此，$\mathrm{Coker}u \in \mathcal{GACP}(R)$。

命题二：若 R 为任意环，M 为 R- 双模，则 $\mathcal{GACP}mon(M \otimes_R -)$ 关于扩张封闭。

证明：考虑 $T_R(M)$- 模的短正合列 $0 \to (X,u) \to (Y,v) \to (Z,w) \to 0$，其中 $(X,u), (Z,w) \in \mathcal{GACP}mon(M \otimes_R -)$。下证 $(Y,v) \in \mathcal{GACP}mon(M \otimes_R -)$。由命题二及 $\mathrm{Tor}_1^R(M, X) = 0$ 可得以下交换图：

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & M\otimes_R X \arrow[r] \arrow[d, "u"] & M\otimes_R Y \arrow[r] \arrow[d, "v"] & M\otimes_R Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}u \arrow[r] & \mathrm{Coker}v \arrow[r] & \mathrm{Coker}w \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

其中每一行都是正合序列，u 和 w 是单同态。由五引理可知 v 为单同态，由于 Gorenstein AC- 投射模关于扩张封闭，则 $\mathrm{Coker}v\in\mathcal{GACP}(R)$。因此，$(Y,v)\in\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$。

命题三：若 R 为任意环，M 为幂零 R- 双模。则对任意投射 R- 模 P，$(\mathrm{Ind}P,c_P)$ 是 $\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$ 中的投射对象且有足够多投射对象。

证明：考虑 $\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$ 的短正合列 $\xi:0\to(X,u)\to(Y,v)\to(Z,w)\to 0$，有自然同构 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(M\otimes_R -)}((\mathrm{Ind}P,c_P),\xi)\cong\mathrm{Hom}_R(P,U(\xi))$ 可知，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Rep}(M\otimes_R -)}((\mathrm{Ind}P,c_P),\xi)$ 是正合的，故 $(\mathrm{Ind}P,c_P)$ 是 $\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$ 中的投射对象。下证有足够多的投射对象。设 $(X,u)\in\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$，$\pi:X\to\mathrm{Coker}u$ 是自然的满同态。对 X 有满同态 $f:P\to X$，其中 P 为投射 R- 模。由短正合序列 $0\longrightarrow\mathrm{Ker}(\pi f)\longrightarrow P\xrightarrow{\pi f}\mathrm{Coker}u\longrightarrow 0$ 可知，$\mathrm{Ker}(\pi f)\in\mathcal{GACP}(R)$。此外，由满同态 $f:P\to X$ 可知存在以下 R- 模的满同态 $f':\mathrm{Ind}P=P\oplus(\oplus_{i=1}^{n}M^{\otimes_R i}\otimes_R P)\to X$。因此，由命题三可得范畴 $\mathrm{Rep}(M\otimes_R -)$ 中的短正合列 $0\to(Y,v)\to(\mathrm{Ind}P,c_P)\to(X,u)\to 0$。显然，为 $c_P:M\otimes_R \mathrm{Ind}P\to\mathrm{Ind}P$ 单同态，又由于 $u:M\otimes_R X\to X$ 是单同态，因此可知 v 为单同态且 $\mathrm{Coker}v\cong\mathrm{Ker}(\pi f)\in\mathcal{GACP}(R)$。则 $(Y,v)\in\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$。

命题四：若 R 为任意环，M 为幂零 R- 双模。则对任意的 Gorenstein AC- 投射 R- 模 V 及 level R- 模 L，以及任意 $i\ge 0$，有 $\mathrm{Ext}_R^1(V,M^{\otimes_R i}\otimes_R L)=0=\mathrm{Tor}_1^R(M,M^{\otimes_R i}\otimes_R V)$。则对任意投射 R- 模 P，$(\mathrm{Ind}P,c_P)$ 是 $\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$ 中的内射对象且有足够多内射对象。

证明：考虑 $\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$ 的短正合列 $0\longrightarrow(X,u)\xrightarrow{f}(Y,v)\xrightarrow{g}(Z,w)\longrightarrow 0$。证明对任意的态射 $\alpha=(a_0,a_1,\cdots a_n)^t:(X,u)\to(\mathrm{Ind}P,c_P)$，存在态射 $\beta=(b_0,b_1,\cdots b_n)^t:(Y,v)\to(\mathrm{Ind}P,c_P)$，使得 $\alpha=\beta f$，其中 t 表示转置。由条件可知，存在以下行列正合的交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & M\otimes_R X \arrow[r, "M\otimes f"] \arrow[d, "u"] & M\otimes_R Y \arrow[r, "M\otimes g"] \arrow[d, "v"] & M\otimes_R Z \arrow[r] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_X"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_Y"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "\pi_Z"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Coker}u \arrow[r, "\bar f"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}v \arrow[r, "\bar g"] \arrow[d] & \mathrm{Coker}w \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

考虑态射 $\alpha=(a_0,a_1,\cdots a_n)^t:(X,u)\to(\mathrm{Ind}P,c_P)$，对任意 $i\ge 0$，有 $a_i:X\to M^{\otimes_R i}\otimes_R P$，$a_0u=0$ 且对任意 $i\ge 1$，有 $a_iu=M\otimes a_{i-1}$。当 $i=0$ 时，由于 $a_0u=0$，故存在态射 $\bar a_0:\mathrm{Coker}u\to P$，使得 $a_0=\bar a_0\pi_X$。由条件可知，$\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Coker}w,M^{\otimes_R i}\otimes_R P)=0$. 因此存在态射 $\bar b_0:\mathrm{Coker}v\to P$，使得 $\bar a_0=\bar b_0\bar f$。令 $b_0=\bar b_0\pi_Y:Y\to P$，可知 $b_0v=\bar b_0\pi_Y v=0$ 且 $b_0f=\bar b_0\pi_Y f=\bar b_0\bar f\pi_X=a_0\pi_X=a_0$。当 $i=1$ 时，由条件可知，$\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Coker}v,M^{\otimes_R i}\otimes_R P)=0$。

因此存在态射 $b_1':Y\to M\otimes_R P$，使得 $b_1'v=M\otimes b_0$。由于：

$$(a_1-b_1'f)u=M\otimes a_0-b_1'v(M\otimes f)=$$
$$M\otimes a_0-(M\otimes b_0)(M\otimes f)=0$$

则由余核泛性质可知，存在态射 $x:\mathrm{Coker}u\to M\otimes_R P$，使得 $a_1-b_1'f=x\pi_X$。又由于 $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Coker}w,M^{\otimes_R i}\otimes_R P)=0$，因此存在态射 $y:\mathrm{Coker}v\to M\otimes_R P$，使得 $x=y\bar f$。令 $b_1=b_1'+y\pi_Y$，可以验证 $b_1v=b_1'v+y\pi_Y v=b_1'v=M\otimes b_0$ 及 $b_1f=b_1'f+y\pi_Y f=b_1'f+y\bar f\pi_X=b_1'f+x\pi_X=b_1'f+a_1-b_1'f=a_1$。

类似地，对任意 $i\ge 2$，存在 $b_i:Y\to M^{\otimes_R i}\otimes_R P$，使得 $a_i=b_if$ 且 $b_iv=M\otimes b_{i-1}$。因此对任意 $\alpha=(a_0,a_1,\cdots a_n)^t:(X,u)\to(\mathrm{Ind}P,c_P)$，存在 $\beta=(b_0,b_1,\cdots b_n)^t:(Y,v)\to(\mathrm{Ind}P,c_P)$，使得 $\alpha=\beta f$。下证有足够多内射对象。对任意的 $(X,u)\in\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$，都有以下 $\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$ 的短正合列 $0\to(X,u)\to(\mathrm{Ind}P,c_P)\to(Y,v)\to 0$。由于 $(X,u)\in\mathcal{GACPmon}(M\otimes_R -)$，则存在 R- 模的短正合列：

$$0\longrightarrow M\otimes_R X\xrightarrow{u}X\xrightarrow{\pi}\mathrm{Coker}u\longrightarrow 0$$

又因为 $\mathrm{Coker}u\in\mathcal{GACP}(R)$，故存在 R- 模的短正合列 $0\longrightarrow\mathrm{Coker}u\xrightarrow{l}P\longrightarrow V\longrightarrow 0$。

其中 $P\in\mathcal{P}(R)$，$V\in\mathcal{GACP}(R)$。因此，$a_0=l\pi:X\to P$。由于 $\mathrm{Ext}_R^1(\mathrm{Coker}v,M^{\otimes_R i}\otimes_R P)=0$，则存在态射 $a_1:X\to M\otimes_R P$，使得 $a_1u=M\otimes a_0$。

类似地，对 $i\ge 2$，可知存在态射 $a_i:X\to M^{\otimes_R i}\otimes_R P$，使得 $a_iu=M\otimes a_{i-1}$。因此可得 $T_R(M)$- 模态射 $\alpha=(a_0,$

$a_1,\cdots a_n)^t:(X,u)\to(\mathrm{Ind}P,c_P)$，其中 t 表示转置。下证 α 为单同态。由条件可知对任意 $i\geq 0$，$\mathrm{Tor}_1^R(M,M^{\otimes_R i}\otimes_R P)=0$。由 $l:\mathrm{Coker}u\to P$ 为单同态可知，$M^{\otimes_R i}\otimes_R l$ 也为单同态。由 $a_0=l\pi$ 可知：

$$\mathrm{Ker}(M^{\otimes_R i}\otimes a_0)=\mathrm{Ker}((M^{\otimes_R i}\otimes l)(M^{\otimes_R i}\otimes\pi))=\mathrm{Ker}(M^{\otimes_R i}\otimes\pi)=\mathrm{Im}(M^{\otimes_R i}\otimes u)$$

容易验证：

$$\mathrm{Ker}(a_0)=\mathrm{Ker}(l\pi)=\mathrm{Ker}(\pi)=\mathrm{Im}(u)$$

$$\mathrm{Ker}(a_1)\cap\mathrm{Ker}(a_0)=\mathrm{Ker}(a_1)\cap\mathrm{Im}(u)=\mathrm{Ker}(a_1u)=\mathrm{Ker}(M\otimes a_0)=\mathrm{Im}(M\otimes u)$$

类似地，可得 $\mathrm{Ker}(\alpha)=\mathrm{Ker}(a_0)\cap\mathrm{Ker}(a_1)\cap\cdots\cap\mathrm{Ker}(a_n)=\mathrm{Im}(M^{\otimes_R i}\otimes u)$。由于 M 是幂零的，则 $\mathrm{Ker}(\alpha)=0$。因此，α 为单同态且 (Y,v) 可表示为 α 的余核。由蛇引理及 l 为单同态可知，v 为单同态且 $\mathrm{Coker}v\cong V\in\mathcal{GACP}(R)$。

命题五：若 R 为任意环，M 为幂零 R- 双模。若对任意的 Gorenstein AC- 投射 R - 模 V 及 level R - 模 L，以及任意 $i\geq 0$，有 $\mathrm{Ext}_R^1(V,M^{\otimes_R i}\otimes_R L)=0=\mathrm{Tor}_1^R(M,M^{\otimes_R i}\otimes_R V)$，且任意 level $T_R(M)$- 模的内射维数有限，则以下等价：

①$\mathcal{GACP}mon(M\otimes_R -)=\mathcal{GACP}(T_R(M))$；

②对任意 $T_R(M)$- 模的 Gorenstein AC- 投射分解 $H^\bullet$，复形 $M\otimes_R H^\bullet$ 是正合的。

证明：①⇒②：由命题一显然可得。

②⇒①：必要性显然可得：

充分性：由命题二至命题四可知，存在完全投射分解：

$$H^\bullet=\cdots\to(\mathrm{Ind}P^{-1},c_{P^{-1}})\to(\mathrm{Ind}P^0,c_{P^0})\to(\mathrm{Ind}P^1,c_{P^1})\to\cdots$$

使得 $(X,u)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Ind}(P^0,c_{P^0})\to\mathrm{Ind}(P^1,c_{P^1}))$，其中 P^i 为投射模。由于任意 level $T_R(M)$- 模的内射维数有限，故 $H^\bullet$ 是超完全投射分解，因此 (X,u) 是 Gorenstein AC- 投射 $T_R(M)$- 模。

参考文献：

[1] E E Enochs, O M G Jenda. Gorenstein injective and projective mdoules[J]. Math Z,1995,220(4):611-633.

[2] L Mao, N Ding. Gorenstein FP-injective and Gorenstein flat modules[J]. J Algebra Appl,2008(7):491-506.

[3] D Bravo, J Gillespie, M Hovey. The stable modules category of a general ring[EB/OL]. Arxiv:1405.5768v1.

[4] P M Algebra[M]. New York, Brisbane, Toronto, Singapore,1991.

[5] X W Chen, M Lu. Gorenstein homological properties of tensor rings[J]. Nagoya Math J,2020(237):188-208.

[6] H Minamoto. Ampleness of two-sided tilting complexes[J]. Int Math Res Not IMRN1,2012:67-101.

[7] Y V Roganov. The dimension of the tensor algebra of projective bimodule[J]. Math Notes,1975(18):119-1123.

[8] R Gobel, J Trlifaj. Approximations and Endomorphism Algebras of Modules[J]. Berlin,Boston: De Gruyter,2012.

作者简介：陈晗钰（1999-），女，中国重庆人，硕士，从事同调代数研究。

基金项目：重庆市自然科学基金项目（项目编号：cstc2018jcyjAX0541）。