

双凯莱图的稳定性

江海艳

重庆师范大学 数学科学学院, 中国 · 重庆 401331

摘要: 图的稳定性是一种图的对称性研究, 为许多数学问题提供了新的视角, 在网络安全等领域都有广泛的应用。若图中存在一个非平凡 TF- 自同构, 则该图是不稳定的, 论文给出了构造不稳定双凯莱图的方法, 还得到五种非平凡不稳定的 Tabachjn 图。

关键词: 双凯莱图; 稳定性

Stability of Double Cayley Graph

Haiyan Jiang

Chongqing Normal, University School of Mathematical Sciences, Chongqing, 401331, China

Abstract: Graph stability is a kind of graph symmetry research, which provides a new perspective for many mathematical problems, and is widely used in network security and other fields. If there exists a non-trivial TF-automorphism in the graph, then the graph is unstable. This paper presents some methods for constructing unstable Cayley Graph and double Cayley graphs; We also conducted some research on the stability of Tabachjn graphs and identified five non-trivial unstable Tabachjn graphs.

Keywords: double cayley graph; stability

0 前言

论文中所有的群都是包含单位元的有限群。所有的图都是无向的, 简单的 $V(\Gamma)$, $E(\Gamma)$, $\text{Aut}(\Gamma)$ 和 $N_\Gamma(u)$ 分别表示图 Γ 的顶点集、边集、自同构群以及图 Γ 中顶点 u 的邻域。图 Γ 的正则双覆盖, 记为 $\Gamma \times K_2$, 是顶点集为 $V(\Gamma) \times \mathbb{Z}_2$, $V(\Gamma) \times \mathbb{Z}_2$ 中两个顶点 $(u, 0)$ 和 $(v, 1)$ 相邻当且仅当 u 和 v 在 Γ 中相邻。易验证, $\text{Aut}(\Gamma \times K_2) \leq V(\Gamma) \times \mathbb{Z}_2$ 。若等号成立, 则称图 Γ 是稳定的; 否则称为不稳定的。易验证不连通图、二部图以及存在两个顶点邻域重合的图一定不稳定。特别地, 上述不稳定图为平凡不稳定图, 称其他不稳定图为非平凡不稳定图。

若群 G 有一个非空子集 X 满足 $X^1=X$, 顶点集为 G , 边集为: $\{[g, xg] | g \in G, x \in X\}$ 的图称为凯莱图, 记作 $\text{Cay}(G, X)$ 。若群 G 在图 Γ 的顶点集上恰有两个轨道并正则的作用在这两个轨道上, 则称 Γ 为 G 上的一个双凯莱图。还可以叙述为: G 是一个群, X, Y, Z 是 G 的三个集合, 其中 X, Y 不含单位元, $X^1=X, Y^1=Y$ 顶点集为: $U \cup V = \{U_g | g \in G\} \cup \{V_g | g \in G\}$, 边集为: $\{[U_g, U_{xg}] | x \in X, g \in G\} \cup \{[V_g, V_{yg}] | y \in Y, g \in G\} \cup \{[U_g, V_{zg}] | z \in Z, g \in G\}$ 的图 Γ 为双凯莱图, 记作 $\Gamma = \text{BC}(G, X, Y, Z)$, 如玫瑰窗图、Tabachjn 图等。

1989 年, Marušič 对图的稳定性进行研究。2011 年, Lauri 提出了若图中存在一对顶点间置换 (α, β) , 使得对任意相邻顶点 x 和 y , 都有 x^α 和 y^α 仍然相邻, 称这样的一对置换为该图的一个 TF- 自同构, 记作 $(\alpha, \beta) \in \text{Aut}^{\text{TF}}(G)$ 。

1 定义及引理

定义 1: 对于满足以下条件 $n \geq 3, 1 \leq s, t, r \leq n-1, s \neq t, r \neq \frac{n}{2}$, 顶点集为: $\{x_i | i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{y_i | i \in \mathbb{Z}_n\}$, 边集为: $\{[x_i, x_{i+1}] | i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{[y_i, y_{i+r}] | i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{[x_i, y_i] | i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{[x_i, y_{i+s}] | i \in \mathbb{Z}_n\} \cup \{[x_i, y_{i+t}] | i \in \mathbb{Z}_n\}$ 的图 Γ 称作 Tabachjn 图, 记作 $\Gamma = T(n; s; t; r)$ 。

引理 1 错误! 未找到引用源。: 图中存在一个非平凡 TF- 自同构, 则图 Γ 是不稳定; 反之, 当 $\Gamma \times K_2$ 连通时, 该引理成立。

引理 2: 若两个顶点间的置换 α, β 对图 Γ 中的任意两点 u, v , 使得:

$$N(u^\alpha) = (N(u))^\beta, N(v^\alpha) = (N(v))^\beta$$

则图 Γ 是不稳定的。

证明: 令 u 和 v 在图 Γ 中相邻, 则 $v \in N(u)$ 。因为 $N(u^\alpha) = (N(u))^\beta$, 有 $v^\beta \in (N(u))^\beta$, 即 u^α 和 v^β 相邻。另一部分同理, 因此 (α, β) 是图 Γ 的一个非平凡 TF- 自同构, 即图 Γ 是不稳定的。

2 主要结果

定理 1: 对于群 G 上连通集为 X 的凯莱图 Γ 。若存在一个非单位元且非二阶元 h , 使得 $hXh=X$, 则图 Γ 是不稳定的。

证明: 令 $\Gamma = \text{Cay}(G, X)$ 。定义两个置换: $L_h, L_{h^{-1}}$: $g^{L_h} = h^{-1}g; g^{L_{h^{-1}}} = hg, g \in G, h$ 的阶不为 2。任意边 $\{g, xg\} \in E(\Gamma)$, 有:

$$(g, xg)^{(L_h, L_h^{-1})} = (h^{-1}g, h x h^{-1}g)$$

因为 $h x h \in h X h = X$, 有 $(h^{-1}g, h x h^{-1}g) \in E(\Gamma)$ 。
则 (L_h, L_h^{-1}) 是图 Γ 的一个非平凡 TF- 自同构。即图 Γ 是不稳定的。

定理 2: 对于双凯莱图 $\Gamma = BC(G, X, Y, Z)$, 若 G 中存在 a, b, c, d , 使得以下之一成立:

① $aXc^{-1} = X, bYd^{-1} = Y, dZa^{-1} = bZc^{-1} = Z$, 其中 a, b , 不全为单位元, c, d 不全为单位元, 且 $a \neq c$ 或 $b \neq d$ 。

② $aXc^{-1} = Y, bYd^{-1} = X, dZa^{-1} = bZc^{-1} = Z^{-1}$, 其中 $a \neq c$ 或 $b \neq d$ 。

③ $aXc^{-1} = b^{-1}Xc = d^{-1}Y a = bYd^{-1} = Z$, 其中 c, d 不全为单位元, 且 $a \neq c$ 或 $b \neq d$ 。

则图 Γ 是不稳定的。

证明: 定义 $V(\Gamma)$ 中的两个置换 α, β :

$$(U_g)^\alpha = U_{ag}, (V_g)^\alpha = V_{bg}$$

$$(U_g)^\beta = U_{cg}, (V_g)^\beta = V_{dg}$$

易验证满足①②③时, (α, β) 是图 Γ 的一个非平凡 TF- 自同构。

例 1: 对于 $\Gamma = BC(G, X, Y, Z)$, 其中 $G = \mathbb{D}_{4m} = \langle p, q | p^{2m} = q^2 = 1, qpq = p^{-1} \rangle$, $X = Y = \{p^{\pm 1}, p^{\pm(m+1)}\}$, $Z \subseteq \langle p \rangle q$ 。令 $a=d=p^m$, $b=c=0$ 易验证图 Γ 不稳定。

例 2: 图 $\Gamma = T(2m; s, -s; m-1)$, 令 $a=d=m$, $b=c=0$ 易验证图 Γ 不稳定。

例 3: 图 $\Gamma = BC(\mathbb{Z}_{2m}, X, Y, Z)$, 其中 $X = \{\pm 1\}$, $Y = Z = \{\pm(m+1)\}$ 。令 $a=b=d=0$, $c=m$ 易验证 Γ 图不稳定。

定理 3: 对于 Tabachjn 图 $\Gamma = T(n; s, t; r)$, 若图 Γ 满足以下条件之一:

① $T(2m; s, t; m-1)$;

② $T(8m; s, t; 2m)$, 其中 s, t 是偶数;

③ $T(4m; m, -m; r)$, 其中 m, r 是奇数;

④ $T(4m; s, 2m; r)$, 其中 s, t 都是奇数或 $r=m$;

⑤ $T(2m; s, t; m-k)$, 其中 $s, t < m$, $k^2 \equiv 1 \pmod{2m}$,

$k \neq \pm 1$, 要么 $ks \equiv -s \pmod{2m}$, $kt \equiv -t \pmod{2m}$, 要么 $ks \equiv -t \pmod{2m}$, $kt \equiv s \pmod{2m}$ 。

则图 Γ 不稳定。

证明 1: 令 α, β :

$$(x_i)^\alpha = y_{-i}, (y_i)^\alpha = x_{-i+m}$$

$$(y_i)^\beta = x_{-i}, (x_i)^\beta = y_{-i+m},$$

$i \in \mathbb{Z}_{2m}$, 由引理 3, 易验证 (α, β) 是此图的一个非平凡 TF- 自同构。

证明 2: 令 α, β :

$$(x_i)^\alpha = \begin{cases} x_{2j}, & i = 2j \\ x_{2j+1+4m}, & i = 2j+1 \end{cases}, (y_i)^\alpha = \begin{cases} y_{2j+4m}, & i = 2j \\ y_{2j+1}, & i = 2j+1 \end{cases}$$

$$(x_i)^\beta = \begin{cases} x_{2j+4m}, & i = 2j \\ x_{2j+1}, & i = 2j+1 \end{cases}, (y_i)^\beta = \begin{cases} y_{2j}, & i = 2j \\ y_{2j+1+4m}, & i = 2j+1 \end{cases}$$

$j \in \mathbb{Z}_{4m}$, 由引理 3, 易验证 (α, β) 是此图的一个非平凡 TF- 自同构。

证明 3: 用 $2m$ 替换证明 2 中的 $4m$, $j \in \mathbb{Z}_{2m}$ 得到 α, β 。由引理 3, 易验证 (α, β) 是此图的一个非平凡 TF- 自同构。

证明 4: 令 α, β :

$$(x_i)^\alpha = \begin{cases} x_{2j}, & i = 2j \\ x_{2j+1+2m}, & i = 2j+1 \end{cases}, (y_i)^\alpha = \begin{cases} y_{2j}, & i = 2j \\ y_{2j+1+2m}, & i = 2j+1 \end{cases}$$

$$(x_i)^\beta = \begin{cases} x_{2j+2m}, & i = 2j \\ x_{2j+1}, & i = 2j+1 \end{cases}, (y_i)^\beta = \begin{cases} y_{2j+2m}, & i = 2j \\ y_{2j+1}, & i = 2j+1 \end{cases}$$

$j \in \mathbb{Z}_{4m}$, 由引理 3, 易验证 (α, β) 是此图的一个非平凡 TF- 自同构。

证明 5: 设 k 为偶数, 则 k^2 也为偶数。与 $k^2 \equiv 1 \pmod{2m}$ 矛盾, 则 k 为奇数。令 α, β :

$$(x_i)^\alpha = y_{ki}, (y_i)^\alpha = x_{ki+m}$$

$$(x_i)^\beta = y_{ki+m}, (y_i)^\beta = x_{ki},$$

$i \in \mathbb{Z}_{4m}$, 由引理 3, 易验证 (α, β) 是此图的一个非平凡 TF- 自同构。

3 结语

论文利用构造 TF- 自同构这一有力工具对图的稳定性进行研究, 得到构造不稳定凯莱图和双凯莱图的方法以及五种非平凡不稳定的 Tabachjn 图。对双凯莱图, Tabachjn 图的研究具有重要的意义。可惜的是 Tabachjn 图的稳定性未完全解决, 接下来可对此继续研究。

参考文献:

- [1] K Kutnar, D Marušič, Š Miklavž, et al. Automorphisms of tabachjn graphs[J]. Filomat, 2013(27):1157-1164.
- [2] J Lauri, R Mizzi. Two-fold automorphisms of graphs[J]. Australas J Combin, 2011(49):165-176.
- [3] D Marušič, R Scapellato, N Z Salvi. A characterization of particular symmetric (0,1) matrices[J]. Linear Algebra Appl, 1989(119): 153-162.
- [4] D. Witte Morris. On automorphisms of direct products of Cayley graphs on abelian groups[J]. Electron J Combin, 2021, 28(3):3-5.

作者简介: 江海艳 (2000-), 女, 土家族, 中国重庆人, 硕士, 从事代数组组合研究。