

一个 Rogers-Ramanujan 型连分数的构造

刘梦蝶

重庆师范大学数学科学学院, 中国·重庆 401331

摘要: Rogers-Ramanujan 连分数是 Ramanujan 笔记本的重要研究内容之一。发现和构造连分数是连分数理论的重要研究内容之一。论文利用 Slater 和 Jackson 恒等式, 通过猜测相关量和证明递归关系, 构造了一个新的 Rogers-Ramanujan 型连分数。

关键词: Ramanujan 笔记本; Rogers-Ramanujan 连分数; q 级数; 递归关系

The Construction of a Rogers-Ramanujan Type Continued Fraction

Mengdie Liu

College of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing, 401331, China

Abstract: The Rogers-Ramanujan continued fraction is one of the significant research contents in Ramanujan's notebooks. Discovering and constructing continued fractions is one of the important research contents in the theory of continued fractions. In this paper, by using Slater and Jackson identities, through guessing relevant quantities and proving recursive relations, a new Rogers-Ramanujan type continued fraction is constructed.

Keywords: Ramanujan notebook; Rogers-Ramanujan continued fraction; q -series; recursive relation

0 前言

近年来, 学者们不断深入对 Rogers-Ramanujan 恒等式和 Rogers-Ramanujan 连分数问题的研究。Kamilla Oliver 和 Helmut Prodinger^[1] 根据小分拆定理推导出 7 个 Rogers-Göllnitz-Ramanujan 型连分数展开式。Prodinger^[2] 和 Sokal^[3] 使用如下递归关系:

$$zS_{k+1} = S_{k-1} - a_k S_k, (k=0, 1, 2, \dots)$$

对一些连分数进行了研究。Gu 和 Prodinger^[4] 在 2011 年根据上述递归关系构造了一类 Rogers-Ramanujan 型连分数, 并由这些连分数推出了相应的 Rogers-Ramanujan 型连分数。论文运用已知递归关系和数学归纳法, 构造出一个关于 $F(z)$ 和 $G(z)$ 的 Rogers-Ramanujan 型连分数 $zG(z)/f(z)$ 。

1 预备知识

为了方便, 本节对后续内容中所用到的定义和引理做如下说明。

定义 1:

$$(a; q)_n := \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k), n \geq 1$$

$$(a; q)_\infty := \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k), |q| < 1.$$

特别地, 当 $n=0$ 时:

$$(a; q)_0 := 1.$$

2 主要结论及证明

本章我们首先定义出恰当的级数 $F(z)$ 和 $G(z)$, 再运用

数学归纳法和递归关系 $zS_{k+1} = S_{k-1} - a_k S_k, (k=0, 1, 2, \dots)$ 构造出了 Rogers-Ramanujan 型连分数, 由此我们推出了与之相对应的 Rogers-Ramanujan 型连分数。

恒等式^[5]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2+2n}}{(q; q)_{2n+1}} = \frac{(q^3, q^5, q^8; q^8)_\infty (q^2, q^{14}; q^{16})_\infty}{(q, q)_\infty}$$

恒等式^[6]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{2n^2}}{(q; q)_{2n}} = \frac{(q, q^7, q^8; q^8)_\infty (q^6, q^{10}; q^{16})_\infty}{(q, q)_\infty}$$

定理 1 设:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{2n^2}}{(q; q)_{2n+1}}, \quad G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{2n^2+2n}}{(q; q)_{2n+1}}.$$

则:

$$\frac{zG(z)}{F(z)} = \frac{z}{1 + 1 - q^3 + 1 - q^5 + 1 - q^7 + \dots}$$

其中:

$$a_{2k} = \frac{1 - q^{4k-1}}{q^{2k}}, a_{2k+1} = \frac{1 - q^{4k+3}}{q^{2k+2}}, a_0 = 1.$$

$$S_{2k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{2n^2+(4k+2)n+2k^2+2k}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_{2k}}, S_{2k+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{2n^2+(4k+4)n+2(k+1)^2}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_{2k+1}}$$

证明: 根据如下连分式展开:

$$\frac{zG(z)}{F(z)} = \frac{zS_0}{S_{-1}} = \frac{zS_0}{a_0 + zS_1} = \frac{z}{a_0 + \frac{zS_1}{a_1 S_1 + zS_2}} = \dots = \frac{z}{a_0 + \frac{z}{a_1 + \frac{z}{\dots}}}$$

可知,

$$S_{-1} = F(z), S_0 = G(z)$$

为得到辅助级数的一般形式, 可先由递归关系 $zS_{k+1} = S_{k-1} - a_k S_k$, ($k=0, 1, 2, \dots$) 求出辅助级数 S_k 的前 10 项, 以及对应的数列 a_k 的前 9 项, 再猜测相对量并利用数学归纳法证明。其中, 记幂级数 S_k 中 z^n 项的系数为 $[z^n]S_k$ 。

当 $k=0$ 时, 有 $zS_1 = S_{-1} - a_0 S_0$ 。

当 $n=0$ 时, $a_0=1$ 。

当 $n > 0$ 时,

$$S_1 = \frac{1}{z}(S_{-1} - a_0 S_0) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2(n+1)^2}}{(q; q)_{2n+3}} (1 - q^{2n+2})$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2(n+1)^2}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_1}$$

当 $k=1$ 时, 有 $zS_2 = S_0 - a_1 S_1$ 。

当 $n=0$ 时, $a_1 = \frac{1-q^3}{q^2}$ 。

当 $n > 0$ 时,

$$S_2 = \frac{1}{z}(S_0 - a_1 S_1) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2(n+1)^2+2(n+1)}}{(q; q)_{2n+3}} \frac{1 - q^{2n+2}}{1 - q^{2n+5}}$$

$$= \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2(n+1)^2+2(n+1)}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_2}$$

以此类推, 可以得到数列 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ 的前 9 项:

$$a_2 = \frac{1-q^5}{q^2}, a_3 = \frac{1-q^7}{q^4}, a_4 = \frac{1-q^9}{q^4}, a_5 = \frac{1-q^{11}}{q^6},$$

$$a_6 = \frac{1-q^{13}}{q^6}, a_7 = \frac{1-q^{15}}{q^8}, a_8 = \frac{1-q^{17}}{q^8}.$$

同时, 可以得到数列 $\{S_k\}_{k \geq -1}$ 的前 10 项:

$$S_3 = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2n^2+8n+8}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_3}, S_4 = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2n^2+10n+12}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_4},$$

$$S_5 = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2n^2+12n+18}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_5}, S_6 = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2n^2+14n+24}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_6},$$

$$S_7 = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2n^2+16n+32}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_7}, S_8 = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n q^{2n^2+18n+40}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_8}.$$

基于上述过程, 可以猜测出定理 1 中的数列 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ 和辅助级数 $\{S_k\}_{k \geq -1}$, 下面将用数学归纳法证明猜测。为了验证对任意 n 都满足递归关系 $zS_{k+1} = S_{k-1} - a_k S_k$, 只需证如下两式:

$$[z^n](S_{2k-1} - a_{2k} S_{2k}) = [z^{n-1}]S_{2k+1} \quad (1)$$

$$[z^n](S_{2k} - a_{2k+1} S_{2k+1}) = [z^{n-1}]S_{2k+2} \quad (2)$$

当 $k \geq 0$ 时,

$$[z^n](S_{2k-1} - a_{2k} S_{2k}) =$$

$$\frac{q^{2n^2+4kn+2k^2}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_{2k-1}} - \frac{1-q^{4k+1}}{q^{2k}} \frac{q^{2n^2+(4k+2)n+2k^2+2k}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_{2k}}$$

$$= \frac{q^{2n^2+4kn+2k^2}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_{2k-1}} (1 - \frac{(1-q^{4k+1})q^{2n}}{1-q^{2n+4k+1}})$$

$$= \frac{q^{2n^2+4kn+2k^2}}{(q; q)_{2n-1} (q^{2n+1}; q^2)_{2k+1}}$$

$$[z^{n-1}]S_{2k+1} = \frac{q^{2n^2+4kn+2k^2}}{(q; q)_{2n-1} (q^{2n+1}; q^2)_{2k+1}}$$

从而递归关系式 1 成立。

当 $k \geq 0$ 时,

$$[z^n](S_{2k} - a_{2k+1} S_{2k+1}) = \frac{q^{2n^2+(4k+2)n+2k^2+2k}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_{2k}} -$$

$$\frac{1-q^{4k+3}}{q^{2k+2}} \frac{q^{2n^2+(4k+4)n+2(k+1)^2}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_{2k+1}}$$

$$= \frac{q^{2n^2+(4k+2)n+2k^2+2k}}{(q; q)_{2n+1} (q^{2n+3}; q^2)_{2k}} (1 - \frac{(1-q^{4k+3})q^{2n}}{1-q^{2n+4k+3}})$$

$$= \frac{q^{2n^2+4kn+2n+2k^2+2k}}{(q; q)_{2n-1} (q^{2n+1}; q^2)_{2k+2}}$$

$$[z^{n-1}]S_{2k+2} = \frac{q^{2n^2+4kn+2n+2k^2+2k}}{(q; q)_{2n-1} (q^{2n+1}; q^2)_{2k+2}}$$

则递归关系式 2 成立。

综上所述, 定理 1 中的数列 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ 和辅助级数 $\{S_k\}_{k \geq -1}$

成立, 故定理 1 证明完毕。

推论 1 在定理 1 中令 $z=1$, 可以进一步得到:

$$\frac{G(1)}{F(1)} = \frac{\sum_{n \geq 0} \frac{q^{2n^2+2n}}{(q; q)_{2n+1}} \frac{(q^3, q^5, q^8; q^8)_\infty (q^2, q^{14}; q^{16})_\infty}{(q, q)_\infty}}{\sum_{n \geq 0} \frac{q^{2n^2}}{(q; q)_{2n+1}} \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{2n^2}}{(q; q)_{2n+1}}}{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n q^{2n^2}}{(q; q)_{2n+1}}}}$$

$$= \frac{1}{1+1-q^3+1-q^5+1-q^7+\dots}$$

3 结论

在已有 Rogers-Ramanujan 型恒等式的基础上, 运用猜测相对量和证明递归关系的方法, 得到新的 Rogers-Ramanujan 型连分数。然而, 对于此方法还可用于对其他 Rogers-Ramanujan 型恒等式的研究。

注: 以上结果在其他文献中并未发现, 故为新结果。

参考文献:

- [1] Kamilla H. Prodinger, Continued fraction expansions related to Göllnitz' little partition theorem[J]. Afrika Matematika, 2013, 24(4):665-670.

- [2] Prodinger H. Finite Rogers-Ramanujan type continued fractions[J].
Journal of Algebra Combinatorics Discrete Structures and Applications,2018,5(3):137-142.
 - [3] Sokal A D. A simple algorithm for expanding a power series as a continued fraction[J]. Expositiones Mathematicae,2023,41(2): 245-287.
 - [4] Gu N S S, Prodinger H. On some continued fraction expansions of the Rogers-Ramanujan type[J]. The Ramanujan Journal,2011, 26(3):323-367.
 - [5] Slater L J. Further Identities of the Rogers - Ramanujan Type[J]. Proceedings of the London Mathematical Society,1952,2(1):147-167.
 - [6] Jackson F H. Examples of a generalization of Euler's transformation for power series[J]. Messenger Math,1928(57):169-187.
- 作者简介: 刘梦蝶(2000-),女,中国四川雅安人,硕士,从事基础数学研究。