

高中数学新旧教材正（余）弦定理对比的教学研究

刘瑞

湖南科技大学, 中国·湖南 湘潭 411100

摘要:教材是根据课程标准的具体化,是教师进行教学的主要依据。在高中数学教学中正余弦定理是重点内容,它揭示了三角形中的边角关系。不仅是对于前面所学向量知识以及几何知识的应用,而且在高考中的常规题解三角形的应用中占据重要地位,因此在教学中掌握正余弦定理的证明过程是进行解题的关键一步。以高中数学的“正余弦定理”为例,论文主要从关于教材的章节目录,定理本身内容等两大方面进行简单比较,从而给出一些相关的教学建议。

关键词:正余弦定理;几何;向量;核心素养;比较研究

Teaching Research on the Comparison of the Law of Sines (or Cosines) in Old and New High School Mathematics Textbooks

Rui Liu

Hunan University of Science and Technology, Xiangtan, Hunan, 411100, China

Abstract: Textbooks are the concretization of curriculum standards and the main basis for teachers to conduct teaching. The sine cosine theorem is a key content in high school mathematics teaching, which reveals the relationship between the edges and corners of a triangle. Not only does it apply the vector and geometry knowledge learned earlier, but it also plays an important role in the application of solving triangles in the regular questions of the college entrance examination. Therefore, mastering the proof process of the sine and cosine theorems in teaching is a key step in solving problems. Taking the “sine cosine theorem” in high school mathematics as an example, this paper mainly compares two aspects: the chapter table of contents of the textbook and the content of the theorem itself, in order to provide some relevant teaching suggestions.

Keywords: sine cosine theorem; geometry; vector; core competencies; comparative study

1 绪论

2017年,教育部对原高中课程标准(2003年版)进行了修订,颁布并实施了新高中课程标准(2017年版)。在新课程标准的指导之下,各类高中数学教科书陆续发行。《基础教育课程改革纲要(试行)》^[1]中指出:“国家课程标准是教材编写、教学、评估和考试命题的依据,是国家管理和评价课程的基础”,而教材又是教师开展教育教学的基本依据,因此基于课程标准对旧教材进行对比研究对教学实施具有重要的指导意义。正余弦定理是高中数学中的重要内容,是代数方法与几何方法融合的一个典型例证,诸多文献已经对其学法教法进行了研究。王婧^[2]在对高中新旧教材“余弦定理”的变化比较中给出教师应该结合旧教材定理的提出,找寻学生易于探究定理的方法。李新生,曹伟在《正余弦定理的证明及应用》^[3]分别运用几何法和向量法对定理进行证明。蔡运安在《正余弦定理证明的教学改进》^[4]中提出了向量的必要性以及运用几何和向量相结合证明定理的方法。论文将从新旧教材对比的角度,对正余弦定理进行学法教法研究,并在此基础上给出若干教学建议。

2 新旧教材内容比较

教材是教师和学生进行活动的材料,是教师进行教学

设计的主要依据。对教材进行分析,则是教师能力提高的基础。在高中教学中几何和向量是常用的数学方法,对于学生核心素养的培养具有重要作用,而且在数学研究中占据重要的地位。关于几何证明研究中,李强根据张景中先生在数学教育中的“中巧说”,提出了几何证明方法的三个注重:①利器:关注基本几何图形的教学;②优术:关注三类语言转换的教学;③明道:关注数学思想方法的教学。关于向量的研究中,在2007年新课程改革座谈会上,曾经担任国际数学教育委员会执行委员的张奠宙教授认为:“向量势必渐渐成为高中数学课程的核心概念”。论文的主要研究目的是通过对于教材中正余弦定理证明的两种方法进行比较分析,从而可以利用两种方法结合进行教学,大大提高学生的数学学习能力,以及让核心素养真正落地。

2.1 章节目录变化

教材的更新,首先体现在目录章节中。

在2007版教材中,正余弦定理位于高中数学必修五的第一章。课本中对于正余弦定理的给出,是先给出了正弦定理,后给出了余弦定理。而在2019版新教材中,位于必修二的第六章第四小节,未再单独列为一章。在其中,正余弦定理给出的顺序也发生了变化,余弦定理在前,正弦定理在后。

单看对于正余弦定理这一章,删去了部分知识,把它

从单独的一章更新为向量知识的拓展与应用,更加注重了与向量知识的联系,方便学生对于知识的串联,更好的利用向量知识解决问题,加强对于先前知识的练习。

旧版:正余弦定理位于高中数学必修五的第一章。课本中对于正余弦定理的给出,是先给出了正弦定理,后给出了余弦定理。正余弦定理处于解三角形这一章,主要作为解三角形的储备知识。

新版:正余弦定理位于必修二的第六章第四小节,未再单独列为一章。在其中,正余弦定理给出的顺序也发生了变化,余弦定理在前,正弦定理在后。正余弦定理处于向量这一章,并且作为向量应用知识的举例出现。

2.2 关于正余弦定理的比较

2.2.1 核心素养侧重的比较

随着社会的发展,社会人才的需要,国家对于教育越来越重视。2016年,中国提出学生发展核心素养体系,在2018年更是在颁布的课程标准中提出了对于学生的核心素养发展由理论开始走向现实。

对于在教学中,最常见的培养学生的核心素养的方法则是通过在教学过程中的潜移默化。在旧版教材中利用辅助线进行证明,主要锻炼了学生们数学抽象与直观想象能力。通过之前所学的知识可以灵活的运用模型去解决问题,对于辅助线的构造虽然有一定的规律,但还是需要靠学生的直观想象与数学抽象能力去进行探索。在新版教材中主要利用向量的方法进行证明,主要锻炼了学生们的数学运算能力。数学运算能力是学生们的首要基础,更是在未来学习中不可或缺的能力。

除此之外,相同的是不管旧版还是新版都注重逻辑推理能力。证明本身就是一个逻辑推理的过程,教师带领着学生完成对于正余弦定理的证明,就是在有意识地培养学生的逻辑推理能力,提高学生的数学思维能力。在现在的教学形势下,教师与学生的互动已以学生为主体教师为主导转变为双主体模式,对于学生的数学核心素养的培养以及对于学生数学思维的提高提供了巨大的支持。

旧版:定理证明利用辅助线进行证明,主要锻炼了学生们数学抽象与直观想象能力。通过之前所学的知识可以灵活的运用模型去解决问题,对于辅助线的构造虽然有一定的规律,但还是需要靠学生的直观想象与数学抽象能力去进行探索。

新版:教材中主要利用向量的方法进行证明,主要锻炼了学生们的数学运算能力。数学运算能力是学生们的首要基础,更是在未来学习中不可或缺的能力。

2.2.2 定理的导入

旧版:对于正弦定理而言,通过对于边角关系的复习先对特殊直角三角形进行探讨,得出结论,随后提出思考对于其他类型三角形是否适用以及思考其他证明方法。对于余弦定理而言,通过复习三角形的全等判定方法,从量化的角度提出这个问题。

新版:本节隶属于向量中的小节,前方引入和旧版一

样,但对于其他方法证明的探究思考,直接点明运用向量法来研究,以及提出了新的问题向量的数量积运算出现了角的余弦,应当如何转化。对于余弦定理而言,跟旧版一样也是从量化的角度提出这个问题。

2.2.3 课程目标的比较

旧版:对于解三角形,第一通过对任意三角形边长和角度关系探索,掌握正弦定理,余弦定理,并能解决一些简单的三角形度量问题。第二能够运用正弦定理。余弦定理等知识解决一些与测量和几何计算有关的实际问题。

新版:首先借助向量的运算,探索三角形边长与角度的关系,掌握余弦定理、正弦定理。其次能用余弦定理、正弦定理解决简单的实际问题。最后,能够从多种角度理解向量概念和运算法则,掌握向量基本定理;能够运用向量运算解决简单的几何和物理问题,知道数学运算与逻辑推理的关系。

2.2.4 定理证明过程的比较

旧版:对于正弦定理的证明中常用于做辅助线的方法进行推导。做出辅助线再利用前面学过的边角关系进行表示,由此得到正弦定理。接着引出了什么是解三角形,以及运用正弦定理求解三角形。对于余弦定理的证明使用向量的数量积进行证明,在证明后提出思考,让学生联系已经学过的知识和方法去解决这个问题。

新版:对于正弦定理的证明主要运用向量法进行表示,通过三角形已知的三边关系用向量代替,再左右同时乘上一个法向量,进行运算得到结论。对于余弦定理的证明同样使用向量的数量积进行证明,随之提出了新的问题,探究勾股定理与余弦定理的关系。

3 优点体现

3.1 几何与向量结合:数学证明与解题的有力工具

在数学的广阔领域中,几何与向量是两个极为重要的概念,也是极为重要的两个数学工具。它们各自拥有独特的性质与方法,而当二者结合时,便释放出了巨大的能量,为数学证明与解题带来诸多显著的好处。

3.2 提供多元视角,拓展思维度

几何主要侧重于从图形的直观角度去描述和分析问题,它能让我们通过对图形的形状、位置关系、度量等方面的观察,获得对问题的初步理解。从而可以对我们构建想象能力以及数学抽象能力进行多方面的发展。而向量则以其代数运算的特性,为解决问题提供了一种量化的方式。主要是对我们的数学运算能力以及逻辑推理能力进行重要的培养。当几何与向量结合,就为我们审视问题打开了两扇不同的窗户。

例如在证明三角形的一些性质时,从几何角度,我们可以通过三角形的全等、相似,以及各种几何定理(如勾股定理、中位线定理等)进行推理;从向量角度,我们可以利用向量的加法、减法、数量积等运算来建立等式关系。这种多元视角能引导我们从不同方向思考问题,避免思维定式,极大地拓展了思维的广度和深度,使我们在面对复杂数学问

题时,能够更全面、灵活地找到解决方案。

3.3 简化复杂证明, 优化解题步骤

许多几何问题如果仅依靠传统的几何方法进行证明,往往需要繁琐的辅助线构造和复杂的逻辑推导。而引入向量后,借助向量的运算规则,可以将几何问题转化为代数运算,从而简化证明过程。

以证明平行四边形的对角线互相平分为例,用纯几何方法,需要通过全等三角形的证明来得出结论,过程较为冗长。若运用向量,根据向量中点的性质,很容易就能证明对角线互相平分,整个过程简洁明了,减少了复杂的几何推理,优化了解题步骤,提高了解题效率。

3.4 精准量化分析, 提升结果精度

在几何问题中,对于一些度量关系(如长度、角度、面积等)的求解,传统几何方法有时难以做到精确计算,常常需要借助复杂的三角函数变换。向量的数量积公式可以直接通过向量运算来计算角度的余弦值,进而精确得到角度大小;通过向量的模长公式,能准确计算线段的长度。

在求解三角形面积时,利用向量的叉积(在二维向量中可以通过巧妙转化实现类似叉积的功能),可以简洁地得出面积公式。这种量化分析的方式,不仅使计算过程更加规范、准确,还能避免因几何图形的复杂变化而导致的计算误差,提升了结果的精度。

3.5 增强知识关联, 构建系统认知

几何与向量的结合,打破了数学知识板块之间的界限,将几何知识与代数知识紧密联系起来。这有助于我们在学习过程中建立起更加系统、完整的数学知识体系。

当我们运用向量解决几何问题时,会不自觉地回顾和运用向量的基本运算规则、几何图形的性质等多方面知识,在这个过程中,不同知识点相互交融、相互强化。例如在研究空间几何中的线面关系时,向量的方向向量和法向量能帮助我们清晰地判断直线与平面、平面与平面之间的平行、垂直等位置关系,同时也加深了我们对空间向量和立体几何知识的理解与记忆,使我们对整个数学知识架构有更深入的认识。

4 教学建议

在数学中,不仅要知其然,还要知其所以然。在教学日渐发展的今天,教学法也在不断创新。通过上边对于新旧教材的比较,在正余弦定理证明方面发生比较明显变化,在旧版教材中,关于正弦定理证明的运用的是几何法,通过做辅助线联系旧知识,可以帮助学生复习先前内容以及可以促进直观想象和抽象能力的培养,但证明时因进行分类讨论,对学生而言难度较大。在新版教材中,运用向量法对正弦定理进行证明,运算简便,可以培养学生的运算能力,但学生一般不知如何下手,不知从何角度找到三角形内角与长度的联系。因此笔者针对此变化给出相关教学建议。

下面用蔡运安老师发表的《正余弦定理的证明改进》为例进行分析。在这篇文章中老师提出了引入向量的必要性,

在证明时先是将 $\triangle ABC$,以A为原点用坐标法勾画出图形,再做了一个类似于辅助线的向量相等,使 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ 。随后利用角边关系把这两个向量表示出来,向量的横纵坐标分别对应相等,由此正弦定理得以推导出来。再用向量 $\overrightarrow{CB}$ 的坐标分量进行表示向量的模,平方后余弦定理得以推导。

在以上推导过程中,避免了分类讨论所带来的难度,使学生更容易接受,同时还得出了三角形的射影定理。这种方法不仅可以使学生感受到知识的魅力,而且在学习过程中可以感受到数学的美以及自己思维的变化与提高。

可见,向量和几何相结合的应用方法是一个很好的结合。在一些研究中也提出向量在几何研究中的地位以及给出一些向量在几何运用中的技巧。

例如上面蔡运安老师对于正余弦定理的证明,也是二者结合才使得证明更加简单易懂,为使学生可以更好的理解向量与几何方法的结合,训练学生的数形结合能力。给出以下例题取自郁金祥老师在《几何证明中向量工具的适时使用》^[9]中的一道例题。

题目:设ABCD是平行四边形,P、Q分别是边BC、CD的中点。证明AP、AQ与对角线BD相交于E、F,而将BD三等分。

在证明中给出了几种方法,但我觉得方法一是最简便的。考虑借用了一点平面几何知识,由 $\triangle BPE \sim \triangle AED$ 可知, $\overline{BE}=1/2 \overline{ED}$,因而 $\overline{BE}=1/3 \overline{BD}$,故E是BD的三等分点。这种证明方法正是几何与向量结合的体现。

所以说,几何证明和向量证明各自都有自己的优点,但二者的结合更是解题的一大利器,方便学生理解思考。在高考答卷过程中,对于解三角形以及其他立体几何图形,一般第一问通常几何法较简单,但对于第二问而言通过建系等可以通过向量法来做,比较节省时间。

5 结语

综上所述,论文通过对教材改变的比较研究,发现新教材的内容变化倾向于对于证明方法的改变,重视探究,更重视对于向量方法的运用,从而更注重运算能力的培养。通过对于核心素养的培养的对比发现,中国目前更注重从理论到实践的的转变,让核心素养真正落地。在教育高速发展的今天,高考改革,教材改变随之而来。对于教材的对比研究,正余弦定理仅仅是其中一小部分的改变,笔者后续将会跟进其他内容的变化研究。

参考文献:

- [1] 教育部.基础教育课程改革纲要(试行)[J].人民教育,2001(9):3.
- [2] 王婧.高中数学新旧教材中余弦定理的对比分析与教学建议[J].考试周刊,2013(11):11-12.
- [3] 李新生,曹伟.正、余弦定理的证明及应用[J].高中数理化,2013(22):12-13.
- [4] 蔡运安.正余弦定理证明的教学改进[J].中学数学,2004(10):12.
- [5] 郁金祥.几何证明中向量工具的适时使用[J].高等数学研究,2006(2):44-45.