

“数”与“形”的共舞：揭秘轴对称的数学魔法

刘畅

北京市陈经纶中学新教育实验分校，中国·北京 100024

摘要：数形结合是初中数学教学中非常重要的一个思想，简单来说，数形结合就是通过代数与图形之间的相互联系，相互转化，从而更有效地解决数学问题，使复杂的问题简单化，抽象的问题具体化。这主要是分为两方面：其一，可以通过几何直观的方法，通过几何图形的性质来研究数量关系，使得代数问题得以解决，也即以形助数；其二，通过代数之间的关系来研究几何图形的性质，使得几何问题得以解决，也即以数助形；无论从哪个方面来说，数形结合的方法都会让问题更加简便；那么轴对称是初中数学中很重要的一章，在这章中也涉及了数形结合的思想，其中用坐标表示轴对称这一小节的内容与数形结合是紧密相连的。

关键词：初中数学；数形结合；轴对称

The Dance of “Numbers” and “Forms”: Unveiling the Mathematical Magic of Axial Symmetry

Chang Liu

Beijing Chen Jinglun Middle School New Education Experimental Branch, Beijing, 100024, China

Abstract: The combination of numbers and shapes is a very important idea in middle school mathematics teaching. Simply put, the combination of numbers and shapes is to solve mathematical problems more effectively through the mutual connection and transformation between algebra and graphics, simplifying complex problems and concretizing abstract problems. This can be mainly divided into two aspects: firstly, algebraic problems can be solved by using geometric intuitive methods to study quantitative relationships through the properties of geometric shapes, that is, using shapes to assist numbers; secondly, by studying the properties of geometric shapes through algebraic relationships, geometric problems can be solved, that is, using numbers to assist in shaping; In any aspect, the method of combining numbers and shapes will make the problem more convenient; so axial symmetry is an important chapter in middle school mathematics, which also involves the idea of combining numbers and shapes. The content of using coordinates to represent axial symmetry is closely related to the combination of numbers and shapes.

Keywords: middle school mathematics; combination of number and form; axial symmetry

0 前言

轴对称是人教版八年级上册第十三章的内容，本章共分为四小节，分别是 13.1 轴对称，13.2 画轴对称图形，13.3 等腰三角形，13.4 最短路径问题；用坐标表示轴对称是 13.2 画轴对称图形中的第二部分内容，在这部分内容当中，我们通过在坐标系中画出某一点关于 x 轴和 y 轴的对称点，分析出了横纵坐标的特点，从而总结出了对称点横纵坐标之间的规律。

1 探究点关于 x 轴和 y 轴对称的点坐标的特点

探究点关于 x 轴和 y 轴对称，我们首先给出一些点坐标： $A(1,2)$ ， $B(-2,4)$ ， $C(-3,-2)$ ， $D(\frac{1}{2},-5)$ ， $E(3,0)$ ，然后我们需要在坐标系中画出这些点，那么这里就要借助几何直观进行分析与研究，我们利用几何画板在坐标系中画出这些点，如图 1 所示；接下来我们要绘制这些点关于 x 轴的对称点，通过分析我们知道，关于 x 轴的对称点，那么 x 轴就是这两点的对称轴，因此两点到 x 轴的距离是相等的，如图 2 所示。

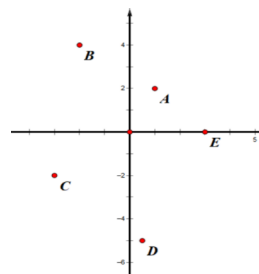


图 1 点 A、B、C、D、E 在坐标系中的位置

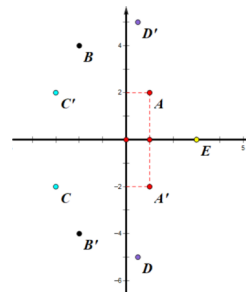


图 2 点 A、B、C、D、E 在轴的对称点

在平面直角坐标系中我们可以通过观察得出, 点 A' 的坐标是 $(1, -2)$, 相应的 $B'(-2, -4)$, $C'(-3, 2)$, $D'(1, 5)$, 而由于点 E 是 x 轴上的点, 所以点 E 的对称点仍然是点 E 本身, 通过对比我们可以得出两个点关于 x 轴对称的规律, 也就是横坐标相同, 纵坐标互为相反数, 如果我们用 (x, y) 来表示任意一个点的坐标, 那么它关于 x 轴对称的点坐标为 $(x, -y)$ 。

接下来我们在坐标系中绘制这些点关于 y 轴的对称点, 则 y 轴就是这两点的对称轴, 因此这两点到 y 轴的距离是相同的, 如图 3 所示。

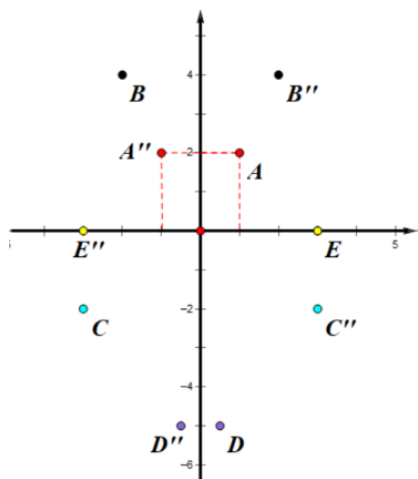


图 3 点 A、B、C、D、E 关于轴的对称点

我们通过观察得出, 点 $A''(-1, 2)$, $B''(2, 4)$, $C''(-3, -2)$, $D''(-1, -5)$, $E''(-3, 0)$, 再与原坐标对比可以得到两个点关于 y 轴对称的变化规律, 也就是横坐标互为相反数, 纵坐标相同, 如果我们用 (x, y) 来表示任意一个点的坐标, 那么它关于 y 轴对称的点的坐标为 $(-x, y)$ 。

2 探究图形关于 x 轴和 y 轴对称的图形的特点

在了解了点关于 x 轴和 y 轴对称的规律以后, 我们来研究图形关于 x 轴和 y 轴对称的规律, 图形是由直线组成的, 而直线又是由点构成的, 因此我们在探索图形的对称变化规律时, 要找出图形中的几个特殊点, 如多边形的顶点; 我们以五边形为例, 首先我们在坐标系中绘制出五边形的这五个顶点, 分别是 $A(1, 2)$, $B(2, -1)$, $C(0, -4)$, $D(-3, -1)$, $E(-2, 2)$ 。其次我们根据点关于 x 轴对称的特点, 即横坐标相等, 纵坐标互为相反数找出每一个点关于 x 轴的对称点 $A'(1, -2)$, $B'(2, 1)$, $C'(0, 4)$, $D'(-3, 1)$, $E'(-2, -2)$, 将这些点顺次连接则形成了原五边形关于 x 轴的对称图形, 如图 4 所示。

类似地, 我们可以作出五边形 $ABCDE$ 关于 y 轴的对称图形, 同样是根据点关于 y 轴对称的特点, 也就是横坐标互为相反数, 纵坐标相同, 得到 $A''(-1, 2)$, $B''(-2, -1)$, $C''(0, -4)$, $D''(3, -1)$, $E''(2, 2)$, 将这些点顺次连接, 形成的图形与原图形关于 y 轴对称, 如图 5 所示。

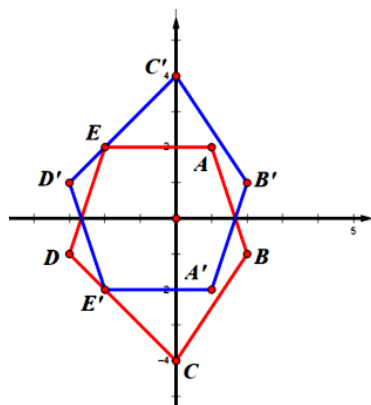


图 4 点 A、B、C、D、E 顺次连接形成原五边形关于 x 轴对称图形

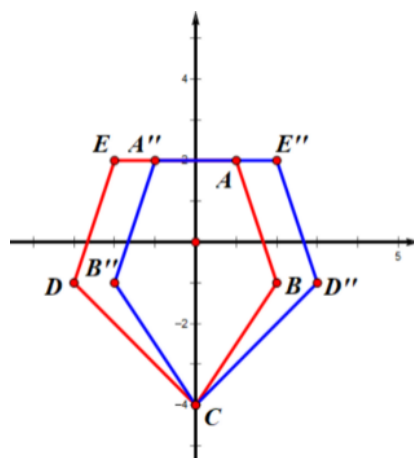


图 5 点 A、B、C、D、E 顺次连接形成图形与原图形关于 y 轴对称

以上我们研究了点和图形关于 x 轴, y 轴对称的变化和规律, 通过一些例子发现了坐标之间的变化规律, 下面我们拓展到一般的情况。

3 探究点关于直线 $x = m$ 和直线 $y = n$ 对称的点坐标的特点

首先我们来研究点关于直线 $x = m$ 对称时坐标的规律, 我们给出 $A(1, 2)$, $B(-2, 4)$, $C(-3, -2)$, $D(\frac{1}{2}, -5)$, $E(3, 0)$ 这五个点坐标, 直线 $x = m$ 是平行于 y 轴的任意直线, 将这些元素绘制在坐标系中, 我们可以看出这些对称点的坐标, 它们的纵坐标不变, 如图 6 所示, 横坐标到直线 $x = m$ 的距离相等, 设直线 $x = m$ 与 x 轴交于点 M , 我们已知 $E(3, 0)$, 则 $ME = m - 3$, 同样的 $ME' = m - 3$, 因此 E' 的横坐标为 $m + (m - 3)$, 也就是 $2m - 3$, 则点 E' 的坐标为 $(2m - 3, 0)$, 按照同样的方法我们可以推出 $A'(2m - 1, 2)$, $B'(2m + 2, 4)$, $C'(2m + 3, -2)$, $D'(2m - \frac{1}{2}, -5)$ 。

如果我们用 (x, y) 来表示任意一点的坐标, 则它关于直线 $x = m$ 对称的点的坐标的变化规律为纵坐标不变, 横坐

标到直线 $x=m$ 的距离相等, 也就是 $(2m-x, y)$ 。

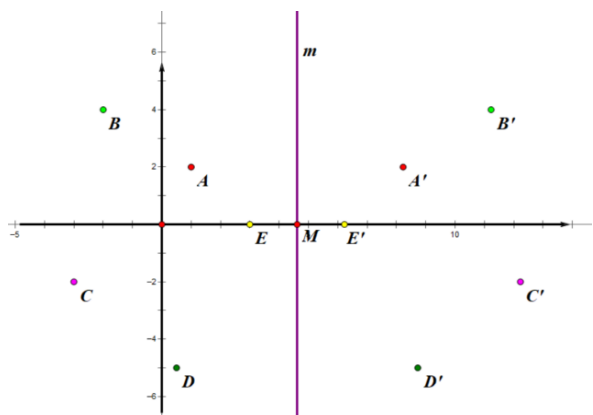


图 6 点 A、B、C、D、E 直线 $x=m$ 对称时的坐标规律

下面我们来研究点关于直线 $y=n$ 对称时, 坐标的变化规律, 仍然是 $A(1,2)$, $B(-2,4)$, $C(-3,-2)$, $D(\frac{1}{2}, -5)$, $E(3,0)$ 这五个点坐标, 我们将这些点坐标以及直线 $y=n$ 绘制到坐标系中, 我们可以看出这些对称点的坐标, 它们的横坐标不变, 如图 7 所示, 纵坐标到直线 $y=n$ 的距离相等, 设直线 $y=n$ 与 y 轴交于点 N , 我们已知 $A(1,2)$, 则点 A 到直线 $y=n$ 的距离为 $2-n$, 同样的点 A' 到 $y=n$ 的距离也为 $2-n$, 因此 A' 的纵坐标为 $n-(2-n)$, 也就是 $2n-2$, 则点 $A''(1, 2n-2)$, 按照同样的思路, 我们可以推出 $B''(-2, 2n-4)$, $C''(-3, 2n+2)$, $D''(\frac{1}{2}, 2n+5)$, $E''(3, 2n)$; 如果我们用 (x, y) 来表示任意一点的坐标, 则它关于直线 $y=n$ 对称的点的坐标的变化规律为横坐标不变, 纵坐标到直线 $y=n$ 的距离, 也就是 $(x, 2n-y)$ 。

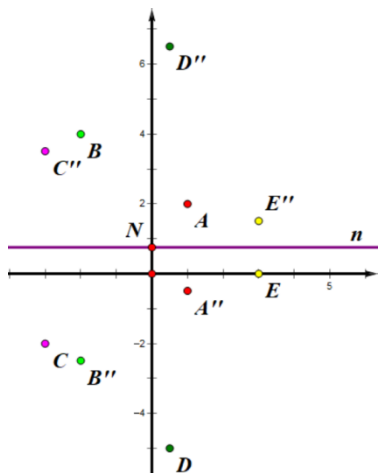


图 7 点 A、B、C、D、E 直线 $y=n$ 对称时坐标规律

4 探究图形关于直线 $x=m$ 和直线 $y=n$ 对称的图形的特点

在掌握了点关于直线 $x=m$ 和直线 $y=n$ 对称的规律以后, 我们来研究图形关于直线 $x=m$ 和直线 $y=n$ 对称的规律, 同样的我们还是利用特殊点关于直线 $x=m$ 和直线

$y=n$ 对称, 来探究图形的变化规律; 我们仍然以五边形的对称为例, 要想得到五边形关于直线 $x=m$ 的对称图形, 我们首先找出五边形的顶点, 分别是 $A(1,2)$, $B(2,-1)$, $C(0,-4)$, $D(-3,-1)$, $E(-2,2)$, 绘制出这五个顶点以及它们关于直线 $x=m$ 的对称点, 我们知道点关于直线 $x=m$ 对称的变化规律是, 纵坐标不变, 横坐标到直线 $x=m$ 的距离相等; 因此得到 $A'(2m-1,2)$, $B'(2m-2,-1)$, $C'(2m,-4)$, $D'(2m+3,-1)$, $E'(2m+2,2)$, 将这些点顺次连接则绘制出了原五边形关于直线 $x=m$ 的对称图形, 如图 8 所示。

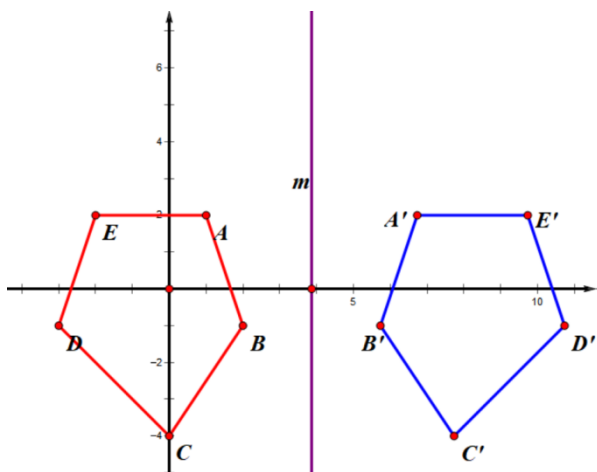


图 8 点 A、B、C、D、E 直线 $x=m$ 的对称图形

类似的, 我们可以绘制出关于直线 $y=n$ 对称的五边形, 我们知道点关于直线 $y=n$ 对称的变化规律是, 横坐标不变, 纵坐标到直线 $y=n$ 的距离相等; 因此得到 $A''(1, 2n-2)$, $B''(2, 2n-4)$, $C''(0, 2n+2)$, $D''(-3, 2n+5)$, $E''(-2, 2n)$, 将这些点顺次连接则绘制出了原五边形关于直线 $y=n$ 的对称图形, 如图 9 所示。

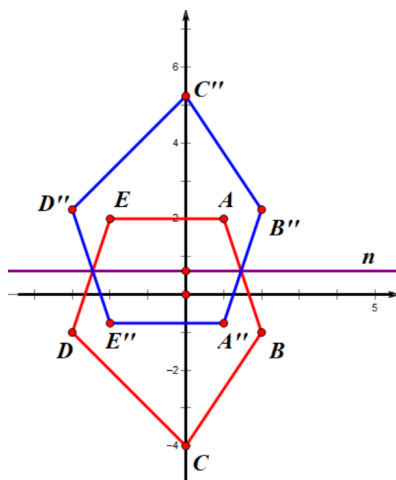


图 9 点 A、B、C、D、E 直线 $y=n$ 的对称图形

以上就是我们对轴对称中的数形结合思想进行的探究与说明, 总结出来为以下几点:

- ①点关于 x 轴和 y 轴对称的点坐标的特点。

关于 x 轴对称: 横坐标相同, 纵坐标互为相反数:

$$(x, y) \text{ 关于 } x \text{ 轴对称 } (x, -y)$$

关于 y 轴对称: 横坐标互为相反数, 纵坐标相同:

$$(x, y) \text{ 关于 } y \text{ 轴对称 } (-x, y)$$

②图形关于 x 轴和 y 轴对称的图形的特点。

找出图形中的特殊点, 再根据点关于 x 轴和 y 轴对称的变化规律作出特殊点的对称点, 顺次连接对称点, 即可得到关于 x 轴和 y 轴的对称图形。

③点关于直线 $x = m$ 和直线 $y = n$ 对称的点坐标的特点。

关于直线 $x = m$ 对称: 纵坐标相同, 横坐标到直线 $x = m$ 的距离相同:

$$(x, y) \text{ 关于直线 } x = m \text{ 对称 } (2m - x, y)$$

关于直线 $y = n$ 对称: 横坐标相同, 纵坐标到直线 $y = n$ 的距离相同:

$$(x, y) \text{ 关于直线 } y = n \text{ 对称 } (x, 2n - y)$$

④图形关于直线 $x = m$ 和直线 $y = n$ 对称的图形的特点。

找出图形中的特殊点, 再根据点关于直线 $x = m$ 和直线 $y = n$ 对称的变化规律作出特殊点的对称点, 顺次连接这些对称点, 就可以得到关于直线 $x = m$ 和直线 $y = n$ 对称的图形。

数形结合思想在培养学生直观想象以及数学运算方面的能力有着很重要的意义, 而且不只是轴对称中应用到了数形结合, 在初中数学中的函数问题, 方程与不等式问题, 平面几何问题, 直角三角函数问题等等都渗透了数形结合的思想, 而在高中的学习当中除了这些内容, 还有立体几何, 解析几何更是将数与形紧密的结合起来了, 中国著名数学家华罗庚曾说过: “数形结合百般好, 隔裂分家万事休”, 可见数形结合思想在数学中的重要作用。

在教学过程中要适时将这种思想渗透给学生, 培养他们利用数形结合解决问题的能力, 加强他们对数形结合思想方法的理解; 在教学的过程中, 要努力提升学生应用数学知

识的能力, 在不断积累数学思想方法的同时将知识逐渐转化为自己的经验, 并且根据这种经验发展自己分析解决问题的能力, 由知识型向能力型转化, 这样才能够不断提升自身的综合素养, 从根本上掌握数学思想的关键所在。

数形结合的思想在应用的过程中主要分为以下几类问题:

①建立代数模型: 主要包括方程模型, 不等式模型, 函数模型;

②建立几何模型或函数图像模型: 将函数图像在坐标系中体现出来也是一种几何直观;

③与函数有关的代数, 几何综合性问题;

④以图像形式呈现信息的应用性问题。

5 结语

采用数形结合解决问题的关键是能找出数与形的契合点, 要把数与形结合起来, 有效的互相转化, 这样才能更好的解决问题; 渗透数形结合的思想可以养成利用数形结合分析问题的习惯, 应用数形结合思想可以提高分析问题, 解决问题的能力, 提高解决问题的灵活性; 在以后的教学过程中, 我也会更加注重数学思想的渗透, 使学生的思维更加灵活, 解决问题的能力得到提升, 让数学学习成为一种乐趣所在, 使学生在体会到数学的奥妙, 激发学习兴趣!

参考文献:

- [1] 义务教育教科书 数学 八年级 上册[M].北京:人民教育出版社,2013.
- [2] 黄子平.数形结合思想在中学数学教学中的应用[D].重庆:西南大学,2017.
- [3] 朱文俊.浅谈数形结合思想在初中数学教学中的应用[J].新课程:教研版,2010(10):151.

作者简介: 刘畅(1998-), 女, 中国北京人, 本科, 二级, 从事中学数学教学研究。