

在高等数学教学中总结的线性方程组的解法

邱薛奕

南通大学, 中国·江苏 南通 226019

摘要: 在高等数学教学中, 线性方程组的求解是核心内容之一, 其数值解法教学对于工程计算具有重要意义。论文围绕高斯消去法展开系统分析, 重点阐述其基本原理、算法构造、实际应用特点。高斯消去法通过逐步消元将系数矩阵转化为上三角形式, 并结合回代过程求解未知向量, 适用于中小规模稠密方程组。论文通过具体数值实例验证方法的适用性, 并利用误差分析手段评估解的精度, 进一步探讨算法在教学中的难点, 进一步深化学生对于线性代数模型求解的理解, 增强学生解决实际问题的能力。

关键词: 线性方程组; 高斯消去法; 三角分解法

The Solutions of Linear Equation Systems Summarized in Higher Mathematics Teaching

Xueyi Qiu

Nantong University, Nantong, Jiangsu, 226019, China

Abstract: In higher mathematics teaching, solving linear equation systems is one of the core contents, and the teaching of numerical solution methods is of great significance for engineering calculations. This paper focuses on the systematic analysis of Gaussian elimination method, emphasizing its basic principles, algorithm construction, and practical application characteristics. The Gaussian elimination method transforms the coefficient matrix into an upper triangular form through gradual elimination of elements, and combines the backtracking process to solve unknown vectors, which is suitable for small and medium-sized dense equation systems. The article verifies the applicability of the method through specific numerical examples, evaluates the accuracy of the solution using error analysis methods, further explores the difficulties of algorithms in teaching, deepens students' understanding of solving linear algebraic models, and enhances their ability to solve practical problems.

Keywords: linear equation system; Gaussian elimination method; triangulation method

0 前言

在高等数学教学体系中, 线性方程组数值求解主要分为直接法和迭代法两大类, 直接法通过有限步运算获得精确解, 被应用到中小规模稠密矩阵问题, 而迭代法则基于逼近策略求解大型稀疏系统, 具有存储量小、计算速度快等优势, 近年来成为科研工作者关注的重点方向。但在实际教学实践中, 高斯消去法、矩阵三角分解 (LU 分解) 作为典型的直接解法, 一直具有较高的应用意义, 尤其在工程计算中被广泛使用。随着计算机技术快速发展, 线性方程组的数值解法已经从手工计算转向软件化、自动化求解, 如 Matlab、Mathematica 等数学工具应用显著提升计算效率, 进一步加强复杂系统求解过程的直观性。尽管当前研究趋势偏重于迭代法的创新, 但直接解法在稳定性、精度控制方面仍不可替代, 特别是在动态方程组求解中的表现非常重要。

论文主要利用高斯消去法深入研究其基本原理、算法流程及适用条件, 并结合具体数值实例进行分析, 研究表明, 高斯消去法适用于结构清晰、阶数适中的线性系统, 通过消元和回代步骤实现解向量求取, 有助于学生理解矩阵运算的基本规律, 也为后续课程如数值代数、科学计算奠定坚实基础。本研究在推动直接解法由经验运算向结构化思维发展,

增强学生数值方法的应用能力, 全面提高高等数学教学的实践性。

1 高斯消去法的优缺点

1.1 优点

高斯消去法作为求解线性方程组的经典直接方法, 在高等数学教学中具有重要的理论地位与实践价值。该方法基于矩阵的初等行变换, 将原方程组逐步转化为上三角形式, 进而通过回代过程求得未知向量, 其基本思想体现了线性代数中方程简化和结构变换的核心理念。在中小规模、稠密系数矩阵的问题中, 高斯消去法具备计算流程清晰、操作性强、收敛稳定等优势, 尤其适用于阶数较低且主元不为零的理想情况。相较于其他数值解法, 该方法实现较为简单, 学生易于掌握, 并能通过手工演算加深对矩阵运算、行列变换及线性相关性的理解, 有助于培养系统性思维与数学建模能力。

从教学角度分析, 高斯消去法的优点主要体现在以下几个方面: 首先, 其算法步骤明确, 逻辑性强, 便于学生理解线性方程组解的存在性、唯一性及求解路径; 其次, 该方法在特定条件下具备较高的求解精度, 尤其适用于非病态、满秩且无显著舍入误差的方程组, 能够有效用于课堂例题

讲解与工程应用实例解析;最后,该方法可作为后续 LU 分解、列主元消去法等更高级解法的基础,推动学生由浅入深地掌握数值代数的基本原理与技术演化路径。此外,借助 Matlab、Python 等现代计算工具,学生可通过编程实现高斯消去法的自动求解,提升算法设计与程序调试能力,增强对数值计算全过程的理解深度^[1]。

1.2 缺点

高斯消去法在实际应用与教学过程中也存在一定的局限性。其一,当系数矩阵出现秩亏或奇异情况时,该方法无法保证解的存在唯一性,可能导致求解结果出现无限多解或无解现象,影响学生对解的确定性判断;其二,对于大型稀疏矩阵问题,该方法的计算复杂度较高,存储需求大,容易产生“填充效应”,即在消元过程中引入大量非零元素,导致计算效率下降,增加时间与空间开销;其三,若未采用选主元策略,在处理病态方程组时可能因舍入误差积累而造成数值不稳定,降低解的可信度,使学生难以准确把握误差来源与控制机制。因此,在教学实践中,应引导学生认识到高斯消去法的适用边界,结合矩阵条件数、秩判定、主元选取等内容进行深入探讨,避免盲目套用标准公式导致误判。进一步而言,教师在讲授高斯消去法时,应强调其在工程计算中的前提条件,如矩阵是否非奇异、主元是否合理选取、是否满足对角占优等,帮助学生建立严谨的数学推导意识。同时,通过对比迭代法(如 Jacobi 法、Gauss-Seidel 法)和现代优化算法(如共轭梯度法),引导学生理解不同解法的适用场景与性能差异,拓展其解题思路^[2]。最终,推动传统解法由经验判断向结构化、智能化方向进行发展,提升学生解决实际问题的能力,增强其对线性代数体系的整体认知水平。

2 高斯消去法基本思想和解法

2.1 基本思想

高斯消去法是通过一系列初等行变换将原方程组的增广矩阵转化为上三角形式,从而实现由前至后的逐步回代求解。设有线性方程组 $Ax=b$, 其中 A 为 n 阶系数矩阵, b 为常数项向量, x 为未知数向量。构造对应的增广矩阵,利用行变换技术,依次消去主对角线下方元素,使矩阵逐步演化为阶梯形矩阵,并最终形成可直接回代求解的上三角矩阵。该过程分为两个阶段:一是消元,即通过行间运算消除低阶变量在高阶方程中的影响;二是回代,从最后一个方程开始逐层向上推演各变量数值。设置线性方程组:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (1)$$

在应用该方法时,要求系数矩阵具有良好的非奇异特

性,且主元位置不能为零,否则需要引入全主元策略进行修正,才能保证计算过程的数值稳定性。对于中小规模稠密线性系统,高斯消去法具备确定性强、收敛速度快的优点,尤其适用于结构清晰、无严重病态特征的问题求解,有助于学生理解矩阵运算和线性代数的基本原理。

2.2 具体解法

高斯消去法通过逐步消元将原方程组转化为等价的上三角矩阵形式,并结合回代过程求解未知向量。设有非奇异系数矩阵 $A^{(0)}x=b^{(0)}$, 其中, $A^{(0)}x=(a_{ij}^{(0)})=(a_{ij}), b^{(0)}=b$ 。第一步($k=1$), 构建增广矩阵 $[A|b]$:

$$(A:b) \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1n}^{(0)} & b_1 \\ a_{21}^{(0)} & a_{22}^{(0)} & \cdots & a_{2n}^{(0)} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1}^{(0)} & a_{n2}^{(0)} & \cdots & a_{nn}^{(0)} & b_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \cdots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \cdots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{bmatrix} = (A^{(2)}:b^{(2)}) \quad (2)$$

其中,乘数 $m_{i1}=a_{i1}^{(0)}/a_{11}^{(0)}, i=2, 3, \dots, n$ 。在第 k 步消元过程中,若当前主元 $a_{ii}^{(k)}=0, i=2, 3, \dots, n$, 而其他系数如下关系式:

$$\begin{cases} a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{1j}^{(1)}, i,j=2,3,\dots,n \\ b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)}, i=2,3,\dots,n \end{cases} \quad (3)$$

则构造乘数因子用于更新后续行的系数与常数项,使 $a_{ik}^{(k+1)}=0$, 从而实现逐层降维。该过程持续至第 $n-1$ 步后,形成可回代求解的阶梯形结构。最终方程组呈现为上三角形式,采用自下而上的回代策略,依序计算各未知变量,完成求解。此方法适用于中小规模稠密矩阵问题,在实际教学中有助于学生理解矩阵运算、行列变换及数值稳定性的基本原理,也为后续学习 LU 分解、迭代法等奠定理论基础^[3]。研究表明,合理控制主元选取顺序并引入列主元策略,有效提升算法稳定性,增强学生数值方法的应用能力^[4]。

3 应用实例

高斯消去法作为求解线性方程组的经典直接方法,在工程计算、科学建模及数值分析中具有广泛的应用价值^[5]。以实际问题为例,针对给定的六元线性方程组,其系数矩阵呈现非对称且部分元素精度较高特征,采用顺序 Gauss 消去法进行求解,构建相应的增广矩阵并通过消元与回代两个阶段完成未知数向量的精确求取。在具体实施过程中,先将原方程组转化为上三角形式:

$$\begin{cases} 17.031x_1 - 0.615x_2 - 2.991x_3 + 1.007x_4 - 1.006x_5 = 0.230, \\ -1.000x_1 + 34.211x_2 - 1.000x_3 - 2.100x_4 + 0.300x_5 - 1.700x_6 = 52.322, \\ 0.500x_2 + 13.000x_3 - 0.500x_4 + 1.000x_5 - 1.500x_6 = 54.000, \\ 4.501x_1 + 3.110x_2 - 3.907x_3 - 61.705x_4 + 12.170x_5 + 8.999x_6 = 240.236, \\ 0.101x_1 - 8.012x_2 - 0.017x_3 - 0.910x_4 + 4.918x_5 + 0.100x_6 = 29.304, \\ 1.000x_1 + 2.000x_2 + 3.000x_3 + 4.500x_4 + 5.000x_5 + 21.803x_6 = -117.818 \end{cases} \quad (4)$$

其增广矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 17.031, -0.615, -2.991, 1.007, -1.006, 0.000, 0.230 \\ -1.000, 34.211, -1.000, -2.100, 0.300, -1.700, 52.322 \\ 0.000, 0.500, 1.3.000, -0.500, 1.000, -1.500, 54.000 \\ 4.501, 3.110, -3.907, -61.705, 12.170, 8.999, 240.236 \\ 0.101, -8.012, -0.017, -0.910, 4.918, 0.100, 29.304 \\ 1.000, 2.000, 3.000, 4.500, 5.000, 21.803, -117.818 \end{bmatrix} \quad (5)$$

并通过 Matlab 编程实现自动计算, 最终获得解向量 X 为: [0.907 098 769 881 24; -1.961 797 949 064 96; 3.293 738 358 850 26; -4.500 708 496 563 41; 2.0293 439 375 366 7; -5.255 068 082 440 49]。该解的获取过程涉及浮点运算、误差控制、主元选取等关键步骤, 尤其在消元过程中需要注意舍入误差的累积影响, 避免病态方程组带来的结果失真^[6]。实践表明, 对于结构合理、主元显著的线性系统, 顺序 Gauss 消去法具备较高的收敛稳定性与计算精度^[7]。本例不仅验证了高斯消去法在复杂方程组中的适用性, 也为教学实践中如何引导学生理解矩阵运算、掌握程序化解题思路提供了可操作路径, 推动传统数学解算由手工推导向软件辅助求解跃迁, 提升学生对数值方法的理解深度^[8]。

其中部分重要代码如下:

```
format long
A=input ( '输入增广矩阵 A=' )
[ m, n ]=size ( A );
for i=1: ( m-1 )
    numb=int2str ( i );
    disp ( [ '第', numb, '次消元后的增广矩阵' ] )
    for j= ( i+1 ): m
        A ( j, : )=A ( j, : )-A ( i, : ) * A ( j, i ) / A ( i, i );
    end
    disp ( '回代求解' )
    x ( m )=A ( m, n ) / A ( m, m );
    for i= ( m-1 ): -1: 1
        x ( i )=( A ( i, n )-A ( i, i+1: m ) * x ( i+1: m ) ) / A ( i, i );
    end
```

4 结语

线性方程组的数值解法作为高等数学与计算数学的重

要组成部分, 其各类方法在理论基础、适用范围及运算效率等方面既存在内在联系, 也表现出显著的差异性。高斯消去法凭借其结构清晰、步骤规范、逻辑严谨等优势, 在中小规模稠密矩阵问题中仍然较高实用性, 尤其适用于非奇异系数矩阵且无严重病态特征的情形, 该方法通过逐次消元将原方程组转化为上三角形式, 并结合回代过程求得未知向量, 充分体现出直接解法的基本思想, 也为后续 LU 分解、列主元消去等改进策略提供理论支撑。

然而, 随着实际问题规模进一步扩大, 稀疏矩阵广泛应用, 传统高斯消去法在计算复杂度与数值稳定性方面的局限日益显现, 特别是在处理大规模病态系统时易受舍入误差影响, 导致解的精度下降。在未来研究中, 需要进一步融合现代计算技术, 如引入并行算法优化消元流程, 提升运算效率; 结合条件数估计与误差分析手段, 增强对病态方程的识别能力; 同时, 深入探索高斯消去法和其他数值方法 (如共轭梯度法、QR 分解) 的混合应用路径, 推动单一解法向多模态解算体系演进。教学过程中亦应注重学生对不同解法适用场景的理解, 强化算法选择的判断能力, 提升数值代数的整体认知水平, 为深入学习科学计算奠定坚实基础。

参考文献:

- [1] 李桂玲.高校“数值分析”课程应用ARCS动机模型优化方法探析[J].成才之路,2024(35):21-24.
- [2] 赵振宇,巩本学,郑明文,等.线性方程组直接解法教学设计的一些改进[J].赤峰学院学报(自然科学版),2022,38(3):1-5.
- [3] 薛亮.高斯消去法和矩阵三角分解法在线性方程组中的应用[J].白城师范学院学报,2021,35(5):20-28.
- [4] 丛静,戴志国.新工科建设背景下“线性代数”课程教学内容改革实例[J].辽宁科技学院学报,2021,23(5):55-56+51.
- [5] 唐秋林.线性代数课程内容的安排与课堂教学情境创设探析[J].科技风,2021(27):39-41.
- [6] 梁宇鹏.空间分数阶扩散方程中线性系统预处理迭代法[D].沈阳:东北大学,2021.
- [7] 张维红.复对称问题、线性互补问题和线性离散不定问题的四种数值解法研究[D].兰州:兰州大学,2020.
- [8] 庞峰.基于齐次线性方程组的解在环上的应用[J].太原师范学院学报(自然科学版),2020,19(3):17-24.