

几何视角下破解初中函数问题的教学实践与理论反思 ——以上海中考24题为例

高聪慧

上海市同凯中学, 中国·上海 201512

摘要: 本文以上海中考数学第 24 题(函数与几何综合题)为研究载体, 聚焦“几何视角下破解初中函数问题”的教学实践与理论反思。首先, 从课程标准对“几何直观”“推理能力”的核心素养要求、上海中考命题趋势、学生解题困难及教学研究缺口四方面, 阐述了研究的背景与必要性; 接着, 通过两道典型例题的具体分析, 展示了如何引导学生从几何视角(如角平分线性质的、等面积转化为平行关系等)简化函数与几何综合问题的求解过程, 并描述了学生的思维转变与教学策略; 最后, 总结了几何视角下解决此类问题的系统方法, 包括挖掘几何性质、构建几何模型、强化数形结合、动态分析不变量等, 为初中数学函数与几何融合教学提供了实践参考与理论支撑。

关键词: 几何视角; 初中函数; 函数与几何综合题; 上海中考 24 题; 教学实践

Teaching Practice and Theoretical Reflection on Solving Function Problems in Junior Middle School from the Perspective of Geometry——Take Shanghai Senior High School Entrance Examination Question 24 as an example

Gao Conghui

Shanghai Tongkai Middle School Jinshan District, China Shanghai 201512

Abstract: This paper focuses on the teaching practice and theoretical reflection of "solving the problem of junior high school function from the perspective of geometry", taking the 24th question of Shanghai Senior High School Entrance Examination Mathematics (comprehensive question of function and geometry) as the research carrier. Firstly, the background and necessity of the research are expounded from four aspects: the core literacy requirements of the curriculum standards for "geometric intuition" and "reasoning ability", the trend of proposition in Shanghai Senior High School Entrance Examination, the difficulties of students in solving problems and the gap of teaching research; Then, through the concrete analysis of two typical examples, it shows how to guide students to simplify the solving process of function and geometric synthesis problems from the geometric perspective (such as the nature of angle bisector, the transformation of equal area into parallel relationship, etc.), and describes the students' thinking change and teaching strategies; Finally, this paper summarizes the systematic methods to solve such problems from the perspective of geometry, including mining geometric properties, building geometric models, strengthening the combination of numbers and shapes, and dynamically analyzing invariants, which provides practical reference and theoretical support for the integration of function and geometry teaching in junior high school mathematics.

Keywords: Geometric perspective; Junior high school function; Comprehensive problems of function and geometry; 24 questions in Shanghai senior high school entrance examination; Teaching practice

0 引言

函数与几何的融合是初中数学的重难点, 也是核心素养的重要体现。新课标强调“几何直观”“推理能力”, 而上海中考第 24 题常聚焦两者融合, 考查学生综合运用知识的能力。但教学中, 学生常陷入单一思维: 或执着代数运算致繁琐, 或忽视几何条件难转化, 制约解题效率与能力发展。

为此, 本研究以“几何视角破解初中函数问题”为切入点, 结合上海中考及二模真题, 梳理几何视角的应用路径, 总结“几何搭框架、代数填细节”策略, 为教学提供参考, 助学生打破定式, 提升思维与素养。

1 案例背景

1.1 课程标准与核心素养要求

在当前义务教育数学课程标准的指导下, 初中数学教

学着重培养学生的核心素养,其中“几何直观”和“推理能力”是极为关键的要素。标准明确提出,学生需能够运用图形描述和分析数学问题,借助直观想象理解数学本质,并在代数与几何知识的融合中,构建起完整的数学认知体系。函数作为初中数学代数领域的核心内容,与几何图形紧密相连,函数图象本身就是几何图形的一种表现形式,其性质也能通过几何特征直观呈现。因此,从几何视角解决函数问题,正是落实课程标准要求、培养学生核心素养的重要途径。

1.2 上海中考命题趋势分析

上海中考数学第 24 题作为典型的综合题,长期以来聚焦函数与几何知识的深度融合,成为考查学生综合运用数学知识解决问题能力的关键题型。通过对近五年上海中考 24 题的研究发现,此类题目常以二次函数图象为载体,融入三角形、四边形等几何图形,要求学生求解函数解析式、图形中的线段长度、面积,以及探究图形的特殊性质(如平行四边形、直角三角形的存在性)等。这些题目不仅需要学生熟练掌握函数的代数运算,更要求学生能够从几何图形的角度分析问题,找到函数与几何之间的内在联系,从而建立数学模型求解。这种命题趋势对学生的数学思维和解题能力提出了极高的要求,也凸显了开展“几何视角下破解初中函数”教学的必要性。

1.3 学生学习现状与困难

在日常教学中,通过课堂练习、作业反馈以及学生的交流发现,学生在面对函数与几何综合问题时普遍存在诸多困难。从知识层面来看,学生对函数的图象性质和几何图形的基本定理掌握不够扎实,难以将两者有效结合;从思维层面而言,学生缺乏将抽象的函数问题转化为直观几何问题的意识和能力,习惯用单一的代数方法解题,导致解题过程繁琐、错误率高。在判断几何图形的特殊性质时,也常常因缺乏几何直观而思路混乱。这些问题严重影响了学生的学习效果和考试成绩,急需通过针对性的教学加以解决。

1.4 教学研究与实践需求

目前,在初中数学教学领域,虽然已有不少关于函数教学和几何教学的研究,但针对函数与几何融合问题的教学研究仍存在不足。特别是从几何视角系统解决初中函数问题的教学实践案例相对较少,缺乏可操作性强的教学策略和方法。因此,开展以上海中考 24 题为载体的教学实践研究,不仅能够填补这一领域的部分空白,为一线教师提供具体的教学参考,还能通过实践探索总结经验,推

动数学教学理论的发展,具有重要的教学研究价值和实践意义。

2 案例分析

2.1 案例 1:

如 2025 年上海初中二模考试杨浦卷:

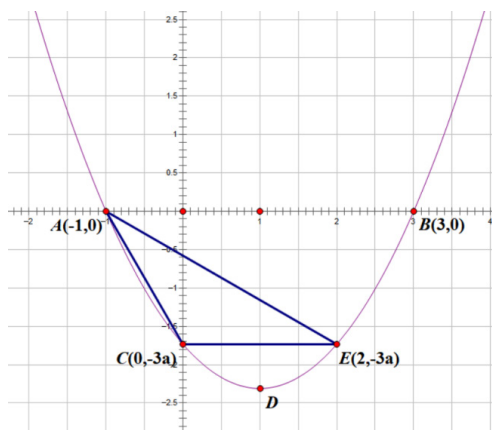
已知平面直角坐标系 xOy , 抛物线 $y = ax^2 - 2ax - 3a$ ($a > 0$) 与 x 轴交于点 A 和点 B (点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C, 顶点为 D, 过点 C 作 $CE \parallel x$ 轴交抛物线于点 E.

(1) 直接写出抛物线的对称轴及点 A、B 的坐标;

(2) 联结 AE, 如果 AE 平分 $\angle BAC$, 求 a 的值;

(3) 点 P 是抛物线上一点, 线段 PD、AE 交于点 F,

如果 $S_{\triangle AFD} = S_{\triangle PFE}$, 那么直线 PD 是否一定会经过一个定点? 如果会, 求出这个定点的坐标; 如果不会, 请说明理由.



如图 1, 在本题的第二小问中, 已知 AE 平分 $\angle BAC$, 如果从代数的角度解决问题, 无疑使得解题的计算量大大增加。因此, 可以从几何的视角来突破本题目。

利用角相等这一条件, 可联想到 $\angle CAE = \angle CEA$, 由此可得 $AC = EC = 2$, 再由 $Rt \triangle AOC$, 计算可得 $OC = \sqrt{3}$, 从而得出 $a = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 。

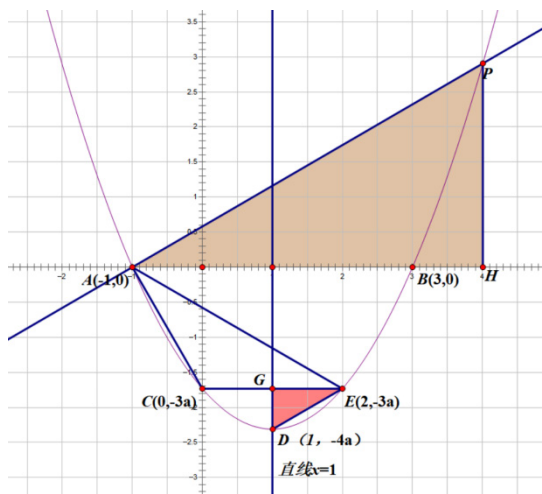
在实际教学过程中, 学生最初难以捕捉到几何线索, 仍执着于代数运算, 导致解题陷入僵局。通过教师引导, 学生逐步学会观察图形特征, 挖掘隐藏的几何关系, 利用角平分线、平行线等条件构建几何模型。在这个过程中, 学生对“数形结合”思想有了更深入的理解, 也体会到几何视角在解决函数问题时的独特优势和高效性。

通过教师引导, 学生逐步学会观察图形特征, 挖掘隐藏的几何关系, 利用角平分线、平行线等条件构建几何模型。教学中采用提问启发与动态演示相结合的方式, 如追问“角平分线和平行线能产生哪些等角?”, 同时借助

几何画板展示角与边的变化,帮助学生建立直观认知。在这个过程中,学生对“数形结合”思想有了更深刻的理解,也体会到几何视角在解决函数问题时的独特优势和高效性。学生从最初的困惑到逐渐掌握方法,不仅实现了知识的迁移应用,更培养了从多维度思考问题的能力,例如有学生尝试通过构造辅助线进一步简化问题,展现出创新思维的萌芽。

2.2 案例 2:

如图 2,上题的第三小问,面积相等这一条件如果尝试用代数表示,那么计算量将是巨大的。



因此,从几何角度如何来利用面积相等这一条件就变得尤其重要。

条件中的面积相等可得 $S_{\triangle ADE} = S_{\triangle PDE}$,

由于这两个三角形是同底,可知他们等高,因此 $AP \parallel DE$,利用平行可知 $\tan \angle DEG = \tan \angle PAH = a$,则 $PG:AG = a$,利用两点之间距离公式可求出 PG 和 AG ,从而解得 P 的坐标为 $(4, 5a)$ 。

在教学过程中,学生理解“等面积同底则等高”的几何原理并不困难,但在实际应用中,部分学生难以将面积关系与直线平行的几何特征联系起来。教师通过几何画板动态演示同底不等高、同底等高三角形的面积变化,引导学生观察等高时顶点的位置关系,帮助学生建立起面积与直线位置的直观联系。

通过这一系列的几何推理与代数计算结合,学生不仅解决了问题,更深刻体会到几何视角在简化问题、指引解题方向上的重要作用,进一步巩固了数形结合的解题思维。这也体现出几何视角在处理函数综合问题时,能够帮助学生从复杂的数量关系中抽离出关键的几何逻辑,以直观的图形关系为线索,找到解决问题的有效路径,为学生应对类似复杂题型提供了可借鉴的思维模式。

3 几何视角下解决初中函数问题的理论解题方法总结

3.1 挖掘几何性质,建立数量联系

在函数与几何综合问题中,要敏锐捕捉角平分线、平行线、垂直关系等几何条件。如遇到角平分线,可联想角平分线性质定理,即角平分线上的点到角两边距离相等,进而构造全等三角形;有平行线时,利用同位角、内错角相等及同旁内角互补等性质,建立角的等量关系,再结合函数中的坐标与线段关系,转化为代数表达式。将函数里复杂的线段长度计算,简化为几何图形中等量关系的推导,把抽象函数具象化,完成代数与几何初步融合,降低解题难度。

3.2 巧用面积、角度等特殊条件,构建几何模型

当题目给出面积相等条件时,除了利用“等面积同底则等高”建立直线平行关系,还可考虑相似三角形面积比与相似比的关系。若两个三角形相似,其面积比等于相似比的平方,据此通过面积条件求相似比,再得出对应边的比例关系。对于角度条件,若已知特殊角度(如 30° 、 45° 、 60°),可构造直角三角形,运用三角函数($\sin$ 、 $\cos$ 、 $\tan$)建立边的比例关系;或者观察是否能构成“一线三等角”“半角模型”等常见相似三角形模型,借助模型结论简化问题。例如在一些函数与几何图形结合的题目中,通过构建“一线三等角”相似模型,可快速得到线段之间的比例关系,从而求解函数中的未知量,提升解题效率。

3.3 强化数形结合,实现思维转化

从函数表达式看,一次函数 $y = kx + b$ ($k \neq 0$), k 决定直线倾斜程度, b 为直线在 y 轴截距,通过这些特征可在坐标系中确定直线位置;二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$), a 决定开口方向,对称轴 $x = -\frac{b}{2a}$,顶点坐标为 $(-\frac{b}{2a}, \frac{4a-c-b^2}{4a})$,依据这些能准确绘制抛物线。在解题时,鼓励学生绘制函数图象并标注几何元素,如交点、线段长度等。像求函数图象中三角形面积,可通过图象观察三角形与坐标轴的关系,利用几何图形割补法,将复杂图形转化为规则图形面积的和或差进行计算;同时,将几何推理结论转化为代数运算,如由相似三角形对应边成比例得到关于坐标的方程求解,或用代数计算验证几何猜想,如通过计算两点间距离判断几何图形形状,实现数与形双向转化,培养全面数学思维。

3.4 动态分析图形,把握不变量

对于图形运动或位置变化的函数问题,借助几何画板等工具动态演示图形变化。在判断直线是否过定点时,分

析图形运动过程中角度、线段比例关系等不变量。比如在一些图形旋转问题中,旋转前后对应线段长度不变、对应角相等,利用这些不变量建立等式。通过观察图形变化,将函数变量问题转化为对几何不变性质的探究,在变化中找不变,明确解题方向,培养学生空间观念和逻辑推理能力,使其面对复杂函数综合题时,能从几何视角快速梳理思路,找到解决问题的有效途径。

4 几何视角与代数视角的辩证关系及融合策略

在函数与几何综合问题中,几何视角与代数视角并非对立关系,而是相辅相成、互为补充的两种思维方式。几何视角以直观图形为载体,通过几何性质、图形关系简化问题逻辑;代数视角以数量关系为核心,通过坐标运算、方程求解精准量化图形特征。教学中需引导学生理解两种视角的本质联系,根据问题特征灵活选择、有机融合,避免陷入“非几何即代数”的片面思维。

4.1 几何视角与代数视角的本质关联

几何是代数的直观模型 函数的代数表达式对应着具体的几何图形,其系数 a 决定直接反映图形特征。几何视角能将抽象的代数关系转化为可观察的图形性质,为代数运算提供“可视化”方向。

代数是几何的量化工具,几何图形中的线段长度、角度大小、面积关系等,最终需通过坐标运算转化为代数表达式求解。例如,“两直线平行”的几何特征对应“斜率相等”的代数结论,“直角三角形”的几何定义对应“勾股定理的代数等式”。代数视角能将模糊的几何直观转化为精确的数量关系,确保推理的严谨性。

两者的转化是解题关键复杂问题的突破往往依赖“几何分析指引代数运算,代数运算验证几何猜想”的双向转化。例如,案例 1 中“角平分线”的几何条件先转化为“线段相等”的几何结论,再通过坐标计算(如 OC 的长度)求出 a 的值,体现了两种视角的协同作用。

4.2 引导学生灵活选择视角的教学策略

4.2.1 基于问题条件的“特征判断法”

若问题含明显几何特征(如角平分线、垂直、特殊图形存在性),优先用几何视角拆解:例如“平行四边形存在性”问题,可先通过几何性质(对边平行且相等)确定顶点坐标关系,再代入函数表达式求解,避免盲目设点列方程。

若问题以数量关系为主(如求函数解析式、最值),优先用代数视角切入:例如已知抛物线上三点坐标求解

式,直接通过待定系数法列方程即可,无需过度依赖几何分析。

若条件混合(如“面积相等+线段垂直”),则需先几何转化(面积 $\rightarrow$ 平行,垂直 $\rightarrow$ 斜率乘积为 -1 ,再代数运算,实现“几何搭框架,代数填细节”。

通过“一题多解”对比视角优劣 在例题教学中,刻意呈现几何法与代数法的完整解题过程,引导学生对比两种方法的效率与适用场景。例如:案例 1 中,用代数法需通过角平分线的斜率关系列方程(涉及三角函数或距离公式),计算繁琐;而几何法利用“平行线+角平分线 $\rightarrow$ 等腰三角形”直接得线段相等,更简洁。

若问题涉及“抛物线与直线的交点横坐标”,代数法(联立方程求解)比几何法(图象观察估算)更精准。通过对比,学生能直观体会“几何法简化逻辑,代数法保证精确”的特点,形成“按需选择”的意识。

4.2.2 强化“视角转化”的思维训练

设计“几何条件代数化”训练:例如给出“三角形为等腰直角三角形”,引导学生列出三种代数情况(腰 1 =腰 2 ,腰 1 =斜边,腰 2 =斜边),将几何分类转化为方程分类。

设计“代数结论几何化”训练:例如已知二次函数 $y=-(x-1)^2+4$,引导学生解读其几何意义(开口向下,顶点 $(1,4)$,与 x 轴交于 $(-1,0)$ 和 $(3,0)$),再思考“如何在图象上找到顶点距离为 5 的点”,将代数计算与几何图形中的圆(以顶点为圆心, 5 为半径)结合。通过双向转化训练,学生能打破思维定式,形成“见数思形,见形思数”的本能。

利用信息技术动态展示视角融合过程 借助几何画板等工具,动态演示“几何图形变化 $\rightarrow$ 代数表达式变化”的关联。例如:

拖动抛物线上的点 P ,同步显示其坐标 (x,y) 与对应几何量(如到原点的距离、与某直线的夹角)的代数表达式,让学生观察图形位置与数量关系的实时对应。

对于“动点形成的图形面积”问题,先通过几何画板直观展示面积随动点移动的变化趋势(几何视角),再引导学生列出面积的函数表达式(代数视角),并验证“几何最值点”与“代数极值点”的一致性。

4.3 避免视角片面化的教学注意事项

警惕“几何直观替代严谨推理” 几何视角依赖图形直观,但直观可能存在误差(如看似平行的直线实际不平行)。教学中需强调:几何猜想必须通过代数运算验证,

例如“判断两直线平行”需计算斜率是否相等，“判断线段相等”需用距离公式确认。

防止“代数运算脱离几何意义”过度依赖代数法会导致学生“算而不懂”，例如在求三角形面积时，机械套用坐标公式却不理解“割补法”的几何原理。教学中应要求学生每一步代数运算都对应明确的几何意义（如“ $|x_1-x_2|$ 表示水平距离”），避免沦为“计算工具”。

培养“视角切换的灵活性”通过变式训练，让学生体会“同一问题不同视角的等效性”

5 结语

几何视角与代数视角的融合，本质是“直观想象”与“数学运算”核心素养的协同发展。教学中需打破“非此即彼”的思维定式，通过特征分析、方法对比、动态演示等策略，引导学生在具体问题中“用几何找方向，用代数定结果”，最终形成“按需选择、灵活转化”的综合解题能

力，真正实现从“解题技巧”到“数学思维”的提升。

参考文献：

- [1] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[M]. 北京：北京师范大学出版社，2022.
- [2] 上海中考数学近五年真题.
- [3] 上海 2025 年二模卷.
- [4] 朱海莹. 数形结合思想在初中数学教学中的实践应用分析[J]. 教育实践与研究，2024,(10):46-48.
- [5] 马晓丹. 信息技术在初中数学几何教学中的应用研究——以几何画板为例[J]. 中国教育技术装备，2023,(08):59-61+64.
- [6] 王瑞芳. 初中数学函数与几何融合教学的实践探索——以反比例函数与几何综合应用为例[J]. 中学数学教学参考，2022,(24):25-27.