

复数方法在平面几何上的应用研究

余保民

渭南师范学院 数学与统计学院, 中国·陕西 渭南 714099

摘要: 本文系统探讨复数在平面几何应用中的理论基础和应用方法. 首先, 通过建立复数与平面向量的对应关系, 建立了复数及其运算与几何变换的对应关系. 在此基础上, 推导出若干核心几何对象, 包括直线、圆、椭圆及双曲线的复数方程形式, 并给出三点共线、向量内积、垂直关系等几何命题的复数判定准则. 最后, 通过两个实例验证了方法的有效性. 研究表明, 复数方法为传统几何问题提供了简洁、可计算的解决方案。

关键词: 复数; 平面向量; 圆锥曲线方程

Research on the Application of Complex Number Methods in Plane Geometry

Yu Baomin

School of Mathematics and Statistics, Weinan Normal University, China Shaanxi Weinan 714099

Abstract: This paper systematically explores the theoretical foundations and application methodologies of complex numbers in plane geometry. First, by establishing correspondences between complex numbers and planar vectors, it delineates the relationships between complex number operations and geometric objects. Based on this foundation, complex-number equations for core geometric objects, such as lines, circles, ellipses, and hyperbolas are derived, while complex-number criteria for geometric propositions such as collinearity of three points, vector inner products, and perpendicular relationships are established. Finally, the efficacy of the method is validated through two examples. The study demonstrates that complex methods offer concise and computable solutions to classical plane geometry problems.

Keywords: Complex numbers; Vector; Conic section equation

0 引言

作为数学领域中一个核心概念, 复数的几何意义不但为理解复数提供了直观的方式, 而且为解决平面几何问题提供了独特视角. 利用复数的几何表示, 可以将几何问题转化为复数的代数运算, 从而为解决传统的几何问题提供了新的工具。

1 复数的几何基础

复数通常有代数形式 $z = x + yi$, 三角形式 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 和指数形式 $z = re^{i\theta}$ 等表示方式, 其中 x 和 y 分别为复数 z 的实部和虚部, r 和 θ 分别为 z 的模和辐角^[1]. 本质上, 这几种表示形式分别由实数对 (x, y) 或 (r, θ) 以一一对应的方式确定. 因此, 可以借助于平面直角坐标系中的点 (x, y) 或极坐标系中的点

(r, θ) , 或者从原点到该点所引的向量来表示复数. 这就建立了复数与平面几何对象之间的联系, 为运用复数解决几何问题奠定了基础。

把复数的应用于解决几何问题, 主要用到以下的对应关系:

(1) 复数 z 的模 $|z|$ 对应向量的长度或点到原点的距离, $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 之间的距离特别地, $|z|^2 = z\bar{z}$ 。

(2) 复数的加减 $z_1 \pm z_2$ 对应于平面上向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 与 $\overrightarrow{Oz_2}$ 的加减. 特别地, $z + a$ 表示点 z 沿向量 $\overrightarrow{Oa}$ 进行的平移。

(3) 复数的乘法对应向量的旋转和伸缩. 设 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, 则 $z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ 表示将向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 的长度伸缩 r_2 倍, 并绕原点逆时针旋转 θ_2 角度。

(4) 复数 z 的共轭 $\bar{z}$ 表示 z 关于实轴的对称点。

2 复数在几何上的典型应用

(1) 三点共线问题。设 z_1, z_2, z_3 为平面上的互异的点, 则三点共线的充分必要条件是向量 $\overrightarrow{z_1 z_3}$ 和 $\overrightarrow{z_1 z_2}$ 平行, 即比值 $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ 为实数。

(2) 平面向量的内积。设平面向量 α 和 $\beta = (x_2, y_2)$ 的内积为 $\alpha \cdot \beta = x_1 x_2 + y_1 y_2$ 。由于向量 α 对应于复数 $z_1 = x_1 + iy_1$, 向量 β 对应复数 $z_2 = x_2 + iy_2$, 根据复数的运算可得 $\alpha \cdot \beta = \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = \frac{1}{2}(z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2)$ 。

(3) 垂直问题。向量 $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 垂直的充要条件是二者的夹角为 $\frac{\pi}{2}$, 即存在非负实数 r , 使得 $z_2 = re^{\pm \frac{\pi}{2}} z_1 = \pm r iz_1$, 亦即 $\frac{z_2}{z_1}$ 为纯虚数。此外, 由两向量垂直的充要条件其数量积为零, 结合式 (1) 可知, $\overrightarrow{Oz_1}$ 和 $\overrightarrow{Oz_2}$ 垂直当且仅当 $\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2) = 0$, 即 $z_1 \bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$ 。

因此, 对于复平面上的四个互异的点 z_1, z_2, z_3, z_4 , 直线 $z_1 z_2$ 和 $z_3 z_4$ 垂直的充要条件是 $\frac{z_2 - z_1}{z_4 - z_3}$ 为纯虚数。

(4) 直线的方程。在平面直角坐标系中, 直线的一般方程为 $ax + by + c = 0$, 其中 a 和 b 不同时为零。用复数 $z = x + iy$ 表示点 (x, y) , 其共轭 $\bar{z} = x - iy$, 则有 $x = \frac{z + \bar{z}}{2}, y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ 。代入到直线方程中, 整理化简后可得 $(a - ib)z + (a + ib)\bar{z} = -2c$ 。令 $\alpha = \frac{1}{2}(a + ib)$, 则可以得到直线方程的复数形式为 $\bar{\alpha} z + \alpha \bar{z} = -c$ 。由内积的复数形式可知, 其几何意义为: 此直线的法向量为 α , 直线上任意点 z 在法向量方向上的投影分量为 $-c/2$ 。

(5) 圆锥曲线的方程。圆是平面上到定点 (圆心) 距离等于定长 (半径) 的点的集合。设圆心为 z_0 , 半径为 r , 则可得到圆的复数方程为 $|z - z_0| = r$ 。

椭圆是平面上到两个定点 (焦点) 距离之和等于常数 (且大于两焦点间距离) 的点的集合。设两个焦点分别为 z_1 和 z_2 , 距离之和为 $2a$ 且 $2a > |z_1 - z_2|$, 则椭圆的复数方程为: $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ 。

双曲线是平面上到两个定点 (焦点) 距离之差的绝对值等于常数 (且小于两焦点间距离) 的点的

集合。设两个焦点分别为 z_1 和 z_2 , 距离之差的绝对值为 $2a$ 且 $0 < 2a < |z_1 - z_2|$, 则双曲线的复数方程为: $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$ 。

3 复数在几何上的应用举例

在文献^[2]中, 李海霞等人用向量的运算证明了如下结果。

例 1 对于向量 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{CD}$, 称线段 AC 、 BD 为始终端线段, AD 、 BC 为交叉端线段, 则两向量的数量积等于交叉端线段平方的平均值与始终端线段平方的平均值的差, 即 $2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = |AD|^2 + |BC|^2 - |AC|^2 - |BD|^2$ 。

上述结果是极化恒等式的自然推广。当向量 $\overrightarrow{AB}$ 和 $\overrightarrow{CD}$ 的起点 A 和 C 相同时, 就得到通常的极化恒等式:

$2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = |AD|^2 + |BD|^2 - |BD|^2$ 。下面用复数方法证明此结果。

证明: 在复平面上, 设点 A, B, C, D 分别对应复数 z_1, z_2, z_3, z_4 , 则 $\overrightarrow{AB} = z_2 - z_1$, $\overrightarrow{CD} = z_4 - z_3$, 且

$$\begin{aligned} |AD|^2 + |BC|^2 &= (z_4 - z_1)(\overline{z_4 - z_1}) + (z_3 - z_2)(\overline{z_3 - z_2}) \\ &= (z_4 - z_1)(\overline{z_4} - \overline{z_1}) + (z_3 - z_2)(\overline{z_3} - \overline{z_2}) \\ &= z_4 \overline{z_4} - z_4 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_4} + z_1 \overline{z_1} + z_3 \overline{z_3} - z_3 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_3} + z_2 \overline{z_2}. \end{aligned} \quad (2)$$

类似地, 可以证得

$$|AC|^2 + |BD|^2 = z_3 \overline{z_3} - z_3 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_3} + z_1 \overline{z_1} + z_4 \overline{z_4} - z_4 \overline{z_2} - z_2 \overline{z_4} + z_2 \overline{z_2}. \quad (3)$$

(2)-(3) 得

$$\begin{aligned} |AD|^2 + |BC|^2 - |AC|^2 - |BD|^2 &= -z_4 \overline{z_1} - z_1 \overline{z_4} - z_2 \overline{z_3} - z_3 \overline{z_2} + z_3 \overline{z_1} + z_1 \overline{z_3} + z_4 \overline{z_2} + z_2 \overline{z_4} \\ &= (z_4 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + (\overline{z_4} - \overline{z_3})(z_2 - z_1) \\ &= (z_4 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_1}) + (\overline{z_4} - \overline{z_3})(z_2 - z_1) = 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}. \end{aligned}$$

例 2 平面上到两个定点距离之比为常数 $k \neq 1$ 的点的轨迹为一个圆。

解: 设 z_1, z_2 为平面上的两个定点 ($z_1 \neq z_2$), z 为动点且到 z_1 和 z_2 的距离之比为 $k \neq 1$, 则 z 满足的几何条件可以用下面的代数方程表示: $\left| \frac{z - z_1}{z - z_2} \right| = k$, 此方程等价于 $|z - z_1|^2 = k^2 |z - z_2|^2$, 即

$$(z - z_1)(\bar{z} - \bar{z}_1) = k^2(z - z_2)(\bar{z} - \bar{z}_2).$$

展开并整理, 可得

$$z\bar{z} - z\bar{z}_1 - \bar{z}z_1 + |z_1|^2 = k^2(z\bar{z} - z\bar{z}_2 - \bar{z}z_2 + |z_2|^2).$$

移项后得到:

$$(1 - k^2)z\bar{z} - z(\bar{z}_1 - k^2\bar{z}_2) - \bar{z}(z_1 - k^2z_2) + (|z_1|^2 - k^2|z_2|^2) = 0.$$

方程两端同除以 $1 - k^2$, 整理可得

$$\left| z - \frac{z_1 - k^2z_2}{1 - k^2} \right|^2 = \left(\frac{k|z_1 - z_2|}{|1 - k^2|} \right)^2.$$

这表明 z 的轨迹是以 $\frac{z_1 - k^2z_2}{1 - k^2}$ 为圆心、半径为 $\frac{k|z_1 - z_2|}{|1 - k^2|}$ 的圆周。

实际上, 从圆的标准方程出发, 也可以任何一个圆必

满足上述方程, 详见文献[3]。

参考文献:

[1] 钟玉泉. 复变函数论[M], 5版. 北京: 高等教育出版社, 2021.

[2] 李海霞, 李世臣. 向量数量积的两个结论及其关系推广[J]. 数学教学, 2025(03), 5-7.

[3] 滕远江. 平面几何的复方程解释[J]. 电脑知识与技术, 2017, 13(30): 240-241.

基金项目: 陕西省教育科学研究“十四五”规划专项课题, 项目编号: SWNZ2413; 渭南师范学院教育教学改革研究项目, 项目编号: 2022JYKX50, 2025HX280。

作者简介: 余保民(1973-), 男, 陕西富平人, 教授, 研究方向: 半群与半环代数理论。