

以导学案为载体，小组活动为中心的高中数学实践课——以“数学归纳法”为例

戴磊¹ 王昊晨^{1,2}

1. 渭南师范学院数学与统计学院，中国·陕西 渭南 714099

2. 陕西理工大学数学与计算机学院，中国·陕西 汉中 723000

摘要：在新课程背景下，教师应改变传统教学模式，创新教学方法，激发学生的学习兴趣和学习热情，引导学生在合作交流、自主探究中，探寻知识，感受知识形成过程，实现深度学习。本文以一堂数学归纳法课为例，授课以导学案为载体，突出学生以小组为中心的主体参与，体现自主学习的教学理念。让学生通过自主预习，合作探究，质疑拓展，互相竞争实现知识的获取。同时，要明确这种授课方式有其苛刻条件，从课堂设计到学生互动、时间把控等方面都需要具备一些条件，才能有效开展。

关键词：学案；小组活动；赋分激励

Senior high school mathematics practice class with guidance plan as the carrier and group activities as the center——Take "mathematical induction" as an example

Dai Lei¹, Wang Haochen^{1,2}

1. School of Mathematics and Statistics, Weinan Normal University, China Shaanxi Weinan 714099

2. School of Mathematics and Computer Science, Shaanxi University of Technology, China Shaanxi Hanzhong 723000

Abstract: Under the New Curriculum Framework, teachers should reform traditional teaching approaches, innovate instructional methods, and stimulate students' learning motivation and enthusiasm. They must guide students to collaboratively explore knowledge, experience the knowledge formation process, and achieve deep learning through cooperative communication and self-directed inquiry. This paper demonstrates a Mathematical Induction lesson that employs Guided Learning Plans as instructional scaffolds, highlighting student-centered group collaboration and autonomous learning principles. Students acquire knowledge through self-directed previewing, collaborative exploration, critical questioning, and peer competition. However, it is crucial to recognize the demanding prerequisites for implementing this pedagogical model, including well-structured classroom design, effective student interaction dynamics, and precise time management, all of which are essential for successful execution.

Keywords: Learning plans; Group activities; Point-based incentives

0 引言

《中国高考评价体系》包括高考的核心功能、考查内容和考察要求，明确提出了“一核”“四层”“四翼”的概念^[1]，其中“四翼”指的是核心价值、学科素养、关键能力、必备知识。关键能力要求学生有获取知识的能力、实践操作能力、思维认知能力。随着高考评价体系的出台，教学内容呈现、学生学习方式、教师教学方式和师生互动方式也要随之发生变化，这对一线教师的课堂提出了更高的要求。高中导学案教学，可以引导学生自我探究，相互学习，在生生互动，师生互动中培养能力，获取知识。笔者

下面以“数学归纳法”导学案课为例，谈谈以导学案为载体，小组活动为中心的课堂教学设计的一些想法。

1 教材分析

1.1 地位与作用

“数学归纳法”是北师大版高中数学教材《选修 2-2》第一章第 4 节的内容，本节课是第一课时。在学生学习了归纳推理之后，有一定的归纳推理能力，初步掌握了由有限个特殊事例特征得出一般性结论的方法，得出的结论不一定正确。对那些与正整数有关的正确的结论，该如何去证明呢？这就需要进行进一步学习严谨的科学论证方法——数

学归纳法。

教材首先列举出学生学习过的等差数列通项公式，等差数列求和公式，等比数列通项公式，等比数列求和公式，这些公式都是与正整数相关的数学命题。然后抛出问题：怎么样证明它们对每一个正整数 n 都正确？其中两个求和公式已经证明过了，但是两个通项公式只是归纳总结，并未证明，从而引出学习数学归纳法的必要性；最后给出数学归纳法证明该类问题的两个步骤，并举例证明。

本节课的特点是概念不容易理解，计算量较大，也是训练学生抽象思维能力，培养严密的推理论证能力，体验数学内在美的好素材。

1.2 教学目标

初步理解数学归纳法原理，明确数学归纳法证明数学命题的步骤，会证明一些简单的与正整数有关的数学命题。通过课前预习，课堂展示，实现小组组内合作，组间竞争，增强团队合作意识，养成使用学案自主预习的习惯，提高学生学习数学的积极性。

让学生经历发现问题、提出问题、分析问题、解决问题的过程，培养学生观察、归纳、猜想、分析论证的逻辑思维，提高数学抽象、数学运算能力。

1.3 教学重点与难点

重点：理解数学归纳法原理，记住数学归纳法证明命题的两个步骤，会证明一些简单的与正整数有关的数学命题。

难点：数学归纳法第二步中由假设第 k 项成立证明第 $k+1$ 项也成立，及证明中的计算问题。

1.4 育人价值

数学归纳法作为数学证明的基石性工具，自 17 世纪帕斯卡系统阐述以来，始终占据着数学方法论的核心地位。然而，当前教学中普遍存在着“重形式轻思维”的倾向，导致学生尽掌握机械化的证明步骤，却未形成深层逻辑结构^[2]。数学归纳法育人价值远超出证明技巧的范畴，实质上是现代公民理性思维培养的微型训练场，主要体现在以下几方面：

① 数学归纳法能够系统化训练中学生的问题解决能力。学生证明过程中严格遵循“假设—验证—推广”的逻辑链条，学生可以从具体实例归纳一般规律，再通过演绎验证普遍性，有助于理解演绎推理与归纳推理；假设，证明，严密的证明过程有助于学生建立严谨的数学思维习惯；递推的思想，将复杂问题分解成多个可操作的步骤链，有助于学生养成化大问题为若干个小问题，分步解决的数

学思维习惯。

② 数学归纳法中暂时性假设能够训练学生区分“信念”与“真理”，培养科学探究的理性态度。通过分析“乌鸦颜色”等例子，学生形成表面合理性的批判意识，其证伪能力提升 27.4%^[3]。

③ 数学归纳法应用过程体现了数学核心素养。将具体问题转化为自然数序列命题，是数学抽象的表现；通过“奠基—假设—递推”的三段式演绎，训练学生的逻辑推理能力；将具体问题构建成数学模型，运用数学归纳法解决问题，就是数学建模的过程。

④ 数学归纳法的学习中渗透着数学文化价值。从历史维度看，数学归纳法的形成经历了帕斯卡、莫罗利科等数学家长达数百年的探索，其发展史本身就是人类理性认知进步的缩影。教学中适当补充相关知识，可使学生体会数学知识形成的动态过程。

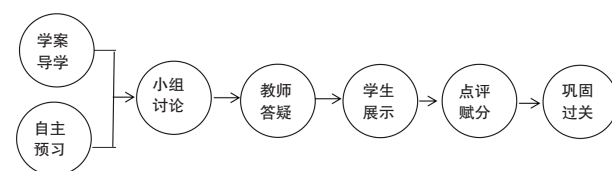
2 学情分析

在知识储备上，学生已经学习了数列相关知识，可以用归纳推理解决一些数列问题，对完全归纳法和不完全归纳法有一定的了解，具备一定的归纳推理能力。其次，平时的小组活动让学生形成了互助合作意识，能够在活动中主动发现问题、分析问题、解决问题。

存在问题：一方面，数学归纳法第二步的证明可能存在思维障碍，学生容易忽略掉假设的使用；另一方面，证明中计算量大，思维跨度高，基础较弱的同学会有一些学习障碍。

3 教学方法

在教法上，采用学案导学与小组互助相结合的方式，通过充分发挥学生的表现欲，让学生展示分享，教师的点评赋分，给予激励。其过程就是：课前分发导学案，学生自主预习，课上教师引导，抛出问题，小组讨论，教师答疑，学生展示，教师点评赋分，形成知识，最后巩固过关。



在学法上，采用小讨论法，展示分享法及点评赋分法相结合。课前，学生通过阅读教材，查阅参考书，实现自主学习；课上，组内讨论，组间展示比拼，体验探究；教师解惑，点评，形成知识；课后，反思总结加强巩固。

4 教学过程

4.1 提出问题, 引出新课

教师: 在本章第一小节, 我们已经学习过归纳推理, 知道由归纳推理得到的结论不一定正确, 那么对于那些与正整数相关的正确的数学命题, 该如何去证明呢? 例如数列的通项公式。这就是本节课需要解决的问题。

首先, 请大家阅读课本, 完成导学案创设情景部分, 回答问题 1-4。

问题 1: 袋中有 5 个绿球如何判断它们都是绿色?

问题 2: 已知数列 $\{a_n\}$, 已知 $a_1 = 1, a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} (n=1, 2, 3, \dots)$, 如何猜想其通项公式?

设计意图: 问题 1 需要考察全体对象得出结论称为完全归纳法; 问题 2 只需考察部分对象得出结论称为不完全归纳法。教师结合问题总结, 从而得到这两个概念。

问题 3: 某人看到树上的乌鸦是黑的, 就深有感触地说, 全世界的乌鸦都是黑色的。这是什么归纳法? 结论正确吗?

问题 4: 我们学过的费马猜想用什么归纳法? 结论正确吗?

设计意图: 《课标(2020 年修订)》中提到“情景”158 次, 可见其重要性, 可以认为情景是学生认识的桥梁, 是知识转化为素养的桥梁^[3]。因此在教学中要给学生创设情境, 让学生在情境中提出问题, 分析问题, 解决问题, 获取知识、技能和态度。本课中, 给学生提出的四个问题就是让学生在解决实际问题中生成概念, 这种概念教学模式被称为“问题引申模式”^[4]

问题 1 中完全归纳法得出的结论一定可靠; 问题 4 不完全归纳法得出的结论不一定可靠; 问题 2 和问题 3 中不完全归纳法的结论是正确的; 问题 2 经过代值验证是正确的, 它的证明可以引出新课。

课件展示活动内容: 思考准备时间: 6 分钟, 个人定向分, 两问 1 分。

教师板书: 完全归纳法, 不完全归纳法。

设计意图: 培养学生大猜想意识和数学概括能力, 同时考查学生预习情况。4 个问题指定自觉性较弱的同学回答, 可以灵活再创设新问题, 既抽查预习情况, 又防止学生互相抄袭,

4.2 探究课题, 构建知识

教师: 问题 2 中我们猜想得到数列通项公式, 像这种与正整数相关的数学命题该如何证明呢? 我们先来看一段视频。用多媒体播放多米诺骨牌游戏视频,

问题 5: 游戏中多米诺骨牌一一倒下需要哪几个步骤?

小组组内互相讨论, 并推举一人回答问题。教师采用击掌竞争的方式选取一个小组, 让组内成员推举一人回答问题, 在此, 设置一个团体自由分, 1.5 分, 用时大约 8 分钟。

设计意图: 学生通过小组组内讨论得出结论, 组间竞争获得回答问题的机会, 增强了团队合作意识, 可以提高学习的趣味性, 激发学生参与课堂的积极性, 体验获得知识的成就感。

经过讨论, 我们知道多米诺骨牌全部倒下, 需要这样两个步骤: 第一步, 第一块骨牌必须倒下; 第二步, 前一块骨牌倒下后, 必须砸倒后一块骨牌。因此, 证明与正整数相关的数学问题, 也需要两个步骤: 第一步, 处理第一个问题; 第二步, 验证后一问题与前一问题有递推关系。

问题 6: 如何证明问题 2 中数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = \frac{1}{n}$?

请大家阅读教材, 仿照教材例题 1, 按照我们总结的两个步骤, 小组互相探讨, 完成对该题目的证明, 有问题或疑惑的地方请举手。随后, 我们将抽查一个小组, 让组内两名学生黑板展示, 其中一名同学板书, 另一名同学讲解, 并说明小组在解决该问题时, 遇到什么困难, 如何解决的, 其余小组可以补充说明。探讨时间, 6 分钟。设置一个团体自由分, 1.5 分。

设计意图: 从概念形成的心理过程来看, 新的概念必须依赖原有的知识和经验, 这就是奥苏伯尔提出的“先行组织者”^[5]。学生在小组互相讨论中完成证明, 形成经验的积累, 对求解过程中存在的思维障碍; 通过组内互相讲解和请教老师得到解决, 提高对概念的认识和理解; 然后由两名同学共同完成展示, 体现了团队合作精神。并要求说出本小组解决问题时遇到的困难, 采取的解决办法, 实现重难点的突破, 其余小组予以补充, 完善细节, 培养学生严密逻辑思维。教师再进行点评总结, 强化得到的结论。

刚才两个同学所使用的这种方法, 称为数学归纳法。用数学归纳法证明与正整数 n 相关的数学命题分为两个步骤: 第一步, 验证: 当 n 取第一个值 n_0 (如取 1 或 2 等) 时命题成立; 第二步, 在假设当 $n=k (k \in \mathbb{N}^+, k \geq n_0)$ 时命题成立的前提下, 推出当 $n=k+1$ 时命题成立。根据这两步就可以断定命题对一切从 n_0 开始的正整数 n 都成立。

请大家完成导学案抽象概括部分。

4.3 思维导疑, 完善细节

请阅读导学案“点拨导疑”部分, 用数学归纳法证明

一下命题例 1:

例 1. 用数学归纳法证明: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$. (n 为正整数)

学生独立思考、解决问题, 展示自己的解题思路, 同时比较例 1 与问题 2 在第二步的证明中有何不同, 并归纳总结。

设计意图: (1) 学生刚学习数学归纳法, 方法步骤不够熟练, 书写不规范, 需进一步巩固和提高,

突破难点: 由假设第 k 项成立证明第 k+1 项求解思路, 两个问题, 两种思路: 一是使用递推式, 二是给假设的第 k 项等号或不等号两边同加相应的项数, 使它变成第 k+1 项。

用时 5 分钟。设置一个个人自由分, 2 分。

通过以上学习, 请大家思考这样一个问题:

问题 7: 用数学归纳法证明数学问题时, 可不可以不用第一步的假设直接得到第二步?

设计意图: 数学归纳法证明数学问题的两个步骤都非常重要, 每个步骤缺一不可。这里让学生思考并结合多米诺骨牌游戏, 体会两步的必要性。其次, 第二步的证明必须建立在第一步的假设之上, 否则, 证明不成立。

用时 6 分钟。设置一个个人自由分, 2 分。

问题 8 (及时测评): 请完成导学案“内化提升”部分。

1. 用数学归纳法证明等式 $1+2+3+\dots+(n+3) = \frac{(n+3)(n+4)}{2}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 时, 第一步验证 $n=1$ 时, 左边应取的项是 ()。

A. 1 B. 1+2 C. 1+2+3 D. 1+2+3+4

2. 在数列中 $\{a_n\}$, $a_1=1$, $a_{n+1} = \frac{2a_n}{2+2a_n}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 试猜想这个数列的通项公式, 并用数学归纳法证明。

设计意图: 两个问题对应两个类型, 考查学生课堂的学习情况, 深化学生数学归纳法的理解 and 应用。用时 5 分钟。

4.4 课堂小结

数学归纳法是证明与正整数相关的数学命题的一种方法, 它分为两个步骤, 每一步都缺一不可; 在第二步的证明中一定会用到第一步的假设, 或者用递推式, 或者增加相应项数; 证明中要注意标注 k 的初始值, 取值范围, 同时证明的书写格式要符合规范。

4.5 作业设计

完成教材第 19 页习题 1-4 第 1 小题和第 3 小题。

5 教学反思

5.1 以生为本, 突破传统教学模式

数学上关注人的发展, 就是要加强对数学本质的理解, 特别是在数学模型的选择与使用上下功夫。教学中关注人的发展, 就是要把时间还给学生, 让学生有足够时间独立思考, 养成会思考的习惯^[6]。这节课是典型的生本课堂, 整节课以学生为本, 教师利用学生对知识的渴望, 引导学生逐步探索知识的形成过程, 感受知识体系的建立; 学生在活动中自己动手研究, 动脑思考, 构建自己对知识的认知, 对知识的理解更透彻, 记忆更牢固。

整节课采用以导学案为载体, 小组活动为中心, 问题驱动, 赋分激励的教学模式, 充分调动学生的积极性, 让学生以小组为单位, 组内互相讨论, 组间互相竞争。教师组织引领, 答疑解惑, 形成概念, 补充修正, 构建知识。学生在教学活动中主动思考, 积极参与, 成为课堂主角, 并在合作与竞争中, 体验知识的形成, 深入理解数学归纳法的适用对象, 解决问题的步骤, 书写格式。

5.2 对导学案课堂教学的思考

5.2.1 课前的预习

导学案需要学生课前。利用空闲, 根据导学案上提出的问题, 主动预习, 也就是自己提前自学课程内容。这就要求养成良好的预习习惯。但是学生是有惰性的。解决方式有两种: 一是可以通过课堂回答问题赋分, 进行激励, 提高学生预习的积极性; 另一方面, 教师可以在上课前用 2~3 分钟时间, 进行检查。

5.2.2 如何赋分

赋分激励可以调动学生参与课堂的积极性, 使学习由老师教, 学生被动接受, 变成学生主动学, 教师引导, 解惑。如何赋分, 既可以体现团体合作, 又能展现学生个人风采就很考验教师的智慧。这里采用的是四种赋分方式: 个人自由分, 班内每个同学都可以抢答, 得到的分数属于个人; 个人定向分, 教师指定每个同学回答, 回答问题也属于个人; 团体定向分, 小组内每个人都可以抢到回答问题的机会, 教师指定组内某几个人回答问题; 团体自由分, 小组抢到回答问题机会后, 由组内派出两到三人回答问题。

5.2.3 时间的把控

小组讨论, 小组展示, 赋分评价等环节需要控制好时间, 既要保证学生有充裕时间完成, 又要保证所有环节有序合理进行完成。

5.2.4 导学案设计

导学案是整节课的灵魂, 课程的有序进行是以导学案

为载体。导学案要能体现本节课的教学目标,重难点,基本教学流程。而且内容既要达到学生学习目标,能力培养,又不能使课堂出现拖拉,处理不完的情况。因此,导学案应主题鲜明,内容简洁明了,问题设置层层递进,且能引发深入思考。

5.2.5 学生的素养

了解学情上好一堂课的必备条件之一,尤其是需要学生主动性学习的课堂。学生的素养就是最重要的学情。学生素养主要分为两部分,一部分数学基础知识,另一部分学生的自律性和配合意识。数学基础知识弱,本该掌握的知识没有掌握,能够算出的题目算不出,课堂会耗费大量的时间,很有可能还达不到教学目标;同样课堂上学生不能够按照要求完成既定学习目标,课堂状况百出,也达不到预期的效果。

参考文献:

[1] 教育部考试中心. 中国高考评价体系 (2019 版) [M],

北京: 人民教育出版社, 2019,12:6-7.

[2] 王徐晨. 数学归纳法在解题应用中的探究[J]. 中学数学教学参考, 2024(11):5-18.

[3] 李德志. 数学归纳与推理能力[R]. 国家级教育研究课题, 2024.

[4] 余文森. 论学科核心素养形成的机制[J]. 课程·教材·教法, 2018,38(1):4-11.

[5] 喻平. 发展学生数学核心素养的教学与评价研究[M]. 上海华东师范大学出版社, 2021.

[6] 殷玉波. 理解教材抓数学本质, 研究考题析关键能力[J]. 中学数学教学参考, 2024(2):25-25.

基金项目: 校企合作科研基金项目: 数智时代服务基础教育的对策与路径研究 (NO.2025HX053)。

作者简介: 戴磊, 男, 河南荥阳人, 渭南师范学院数学与统计学院教授, 理学博士, 研究方向: 数学教育及算子理论和算子代数方面的研究。