线性代数中的课程思政设计——逆矩阵

李健 李艳

上海应用技术大学，中国·上海 201418

摘要：线性代数是研究变量间线性关系一门学科，是一门重要的数学课程，也是理工科学生的基础必修课。本文以“逆矩阵”为例，创设情境，以保密通信问题引入课程，激发学生爱国情怀；在教学中潜移默化的融入思政元素，培养学生正确的世界观、荣辱观和价值观。

关键词：线性代数；课程思政；逆矩阵

Course Ideological and Political Design in Linear Algebra - Inverse Matrix

Li Jian, Li Yan

Shanghai Institute of Technology, China Shanghai 201418

Abstract: Linear algebra is a discipline that studies linear relationships between variables. It is an important mathematics course and a fundamental requirement for students in science and engineering. This paper takes "inverse matrix" as an example, creating a scenario that introduces the course through the problem of secure communication, thereby stimulating students' patriotism. The teaching subtly integrates ideological and political elements to cultivate students' correct worldview, sense of honor and disgrace, and values.

Keywords: Linear algebra; Course ideological and political education; Inverse matrix

0 引言

线性代数作为数学的重要分支，不仅在理论研究中具有深远意义，更在工程技术、经济管理等领域发挥着关键作用。逆矩阵作为线性代数的核心概念之一，体现了数学的严谨性与应用的广泛性。在课程教学中融入思政元素，能够引导学生理解数学背后的哲学思想，培养科学精神与创新意识。通过探讨逆矩阵的数学本质及其在现实问题中的应用，可以启发学生领悟“对立统一”“化繁为简”的辩证思维，增强社会责任感和科技报国情怀。本文将从课程思政视角出发，探讨逆矩阵的教学设计，实现知识传授与价值引领的有机统一。

1 课程思政简要介绍

线性代数是理、工、经济管理等专业的一门重要数学基础课程，该课程不仅可以培养学生的逻辑推理能力、抽象思维能力和空间想象能力，也为学生后续课程学习打下坚实基础。在全国高校思想政治工作会议上，习近平总书记提出：

“提高学生思想政治素质的明确要求，要学会用正确的立场、观点和方法分析问题，把学习、观察、实践同思考紧密结合起来，全面推进课程思政建设”。课程思政体现的是一种创新性思维方式，强调在思想政治理论课以外的课程中有效地融入思想政治教育[1,3]。

本文旨在把课程思政元素融入到线性代数课堂教学设计中去，以逆矩阵为教学案例探讨线性代数课程如何结合课程思政进行教学。逆矩阵是线性代数中一个非常重要的概念，是矩阵乘法的逆运算；逆矩阵的运算和应用对于学习线性代数、解决实际问题都非常重要。同时逆矩阵的应用也十分非常广泛，在线性方程组求解、数据处理、图像处理、机器学习和人工智能、统计学、物理学等方面都有应用。关于逆矩阵的研究本文以保密通信问题展开引入课题，实际上是通过逆矩阵的运算来求解原矩阵的问题，这也是逆矩阵的主要应用之一。从保密通信案例出发，培养学生主动探索、勇于发现的科学精神、创新意识、创新精神，激发学生对国家安保问题的思考以及对社会发展的责任担当意识[4,6]。

2 教学设计

保密通信是新时代发展的一个热门话题，近年来，越来越多的科学家研究保密通信并提出了许多非常有效的保

ISSN：2705-0904(Print)；2705-0874(Online)

密通信模型。具有加密技术的是十分具有研究价值和发展前景的一种保密通信模型，其核心思想是发送方采用某种算法将明文数据加密转换成密文数据后发送给接收方，接收方则采用对应的某种算法将密文数据解密恢复成明文数据。因此，判断一种加密技术是否有效，关键在于密文能否还原成明文。在如今信息快速发展的时代，保密通信在越来越多的领域变得非常重要。军事、商业和日常生活中，信息安全传输已成为焦点问题。为了保护传输数据的安全性，许多加密算法被开发出来，可逆矩阵被广泛用于各种加密算法中。

2.1 引入课题

情景设置：指挥部向执行任务的人员发送指令 ******（该指令是英文字母）。已知：

（1）26 个英文字母与数字之间建立一一对应的关系（见表 1）

（2）将指令从左至右，每 3 个字母分成一组，排成一列，将这些列构成矩阵。

若发出的指令是 ******，使用上述加密方法，则此信息的编码是 3 行 2 列的矩阵，不妨记为 X。此信息直接传输容易被解密，为此，另设置一个密钥矩阵，$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{pmatrix}$，用 $AX=B$ 加密后，发送 B 给执行任务的人员。

问题：若你是执行任务的人员，当接收信息为$\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}$时，如何解密？

设计思路：以军事保密通信问题作为引入，开展教学，使学生了解到所学习的课程知识与国家安全息息相关，一种保卫国家安全的责任感油然而生。从而激发学生的爱国热情、学生的学习兴趣。使学生对本节课的知识充满好奇和探索欲望，迫不及待的想要了解线性代数知识与军事保密通信问题的联系。把保密通信问题带入逆矩阵的学习，用线性代数中逆矩阵的知识来解密，使学生能近距离体验数学的“神奇”与“有用”。

2.2 逆矩阵概念

矩阵运算有加、减、数乘以及矩阵的乘法，没有除法运算。在数的运算中，若 a ≠ 0，有 $aa^{-1}=a^{-1}a=1$，其中 $a^{-1}=\frac{1}{a}$为 a 的倒数或称 a 的逆。类比在矩阵运算中，单位阵 E 相当于数的运算中的 1，那么对于矩阵 A，若存在一个矩阵 A^{-1}，有 $AA^{-1}=A^{-1}A=E$，则称矩阵 A^{-1} 为 A 的可逆矩阵或逆矩阵。

定义 1：对于 n 阶矩阵 A，若有一个 A 阶矩阵 B，使得 $AB=BA=E$

则称矩阵 A 为可逆矩阵，并称 B 为 A 的逆矩阵，A 的逆矩阵记作 A^{-1}。

例 1：设$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$，$\because AB=BA=E$，则 B 是 A 的逆矩阵。

由例 1 思考问题：B 是 A 的逆矩阵，那么 A 还有没有其他的逆矩阵，或者说若矩阵 A 可逆，那么 A 有多少个逆矩阵呢？引出定理 1，逆矩阵的唯一性。

定理 1：若 A 是可逆矩阵，则 A^{-1} 是唯一的。

分析：设 B，C 是 A 的逆矩阵，则 $AB=BA=E$，$AC=CA=E$，可得 $B=EB=(CA)\ B=C(AB)=CE=C$，所以 A^{-1} 是唯一的，即 $B=C=A^{-1}$。

设计思路：要解决保密通信问题，需要求解矩阵方程。首先构建逆矩阵的定义，已知矩阵没有除法，如何引出逆矩阵定义？数学知识的更新学习往往是在旧知的基础上提炼升华，这里通过类比数的倒数，引出矩阵的逆矩阵。把抽象的逆矩阵问题具象化。旧知（数的倒数）和新知（逆矩阵）相互印证。由此引发学生认知结构的重组，激发学生用数的倒数探索逆矩阵定义，降低学生的学习难度。由此顺利的引出逆矩阵的定义及逆矩阵的唯一性。

若取$O=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，找不到矩阵 B 使得 $OB=BO=E$，即零矩阵没有逆矩阵，那么除了零矩阵是否其他矩阵都有逆矩阵？即如何判断矩阵是否可逆，若可逆，如何求逆矩阵？

分析：判断矩阵是否可逆，即对于 n 阶矩阵 A，若可以找到一个 n 阶矩阵 B，使得 $AB=BA=E$，可得 A 可逆。根据前面所学：关于伴随矩阵的一个重要结论 $AA^*=A^*A=|A|E$，很明显当 $|A|\neq 0$时，两边同时除以$|A|$即可求出 $A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，于是可得逆矩阵的计算公式。

2.3 逆矩阵计算

定理 2：方阵 A 可逆的充要条件是$|A|\neq 0$，且$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$，其中 A^* 为 A 的伴随矩阵。

例 2：求方阵$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$的逆矩阵。

表1 英文字母表

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	L	K	M
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26

解：$|A|=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=-2\neq 0$，$\therefore A^{-1}$存在，$A_{1}=4, A_{1}=-2, A_{1}=-3, A_{2}=1$，

得$A^{*}=\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$，故$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&-2\\-3&1\end{pmatrix}$。

观察发现：二阶矩阵的伴随矩阵是主对角线元素互换位置，副对角线元素变为相反数。

于是引导学生推广应用到一般的二阶矩阵求逆：$A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$。

若$|A|\neq 0 \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}d&-b\\-c&a\end{pmatrix}$。对于二阶矩阵的伴随矩阵可以直接运用口诀：主对角线换位置，副对角线变号。

对于三阶及以上的矩阵，根据例 2 的解题步骤，可以总结求逆矩阵的步骤：

(1) 计算$|A|$，判断方阵A是否可逆 ($|A|\neq 0$可逆，$|A|=0$不可逆)；

(2) 求A的伴随矩阵$A^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&\cdots&A_{n1}\\A_{12}&A_{22}&\cdots&A_{n2}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\A_{1n}&A_{2n}&\cdots&A_{n}\end{pmatrix}$；

(3) 代入公式$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}$，求$A^{-1}$。

例 3：下列矩阵A，B是否可逆？若可逆，求其逆矩阵。

(1) $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{pmatrix}$，(2) $B=\begin{pmatrix}2&3&-1\\-1&3&5\\1&6&4\end{pmatrix}$。

解：根据求逆矩阵的步骤可得，

(1) $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&1&2\\1&3&3\end{vmatrix}=4\neq 0$，所以$A$可逆。

$A_{11}=\begin{vmatrix}1&2\\3&3\end{vmatrix}=-3$，$A_{12}=-\begin{vmatrix}2&2\\1&3\end{vmatrix}=-4$，$A_{13}=\begin{vmatrix}2&1\\1&3\end{vmatrix}=5$，

同理可得，

$A_{21}=3$，$A_{22}=0$，$A_{23}=-1$，$A_{31}=1$，$A_{32}=4$，$A_{33}=-3$，

$\therefore A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^{*}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11}&A_{21}&A_{31}\\A_{12}&A_{22}&A_{32}\\A_{13}&A_{23}&A_{33}\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-3&3&1\\-4&0&4\\5&-1&-3\end{pmatrix}$。

由于$|B|=\begin{vmatrix}2&3&-1\\-1&3&5\\1&6&4\end{vmatrix}=0$，故$B$不可逆。

设计思路：基于前面所学关于伴随矩阵的知识可推导出逆矩阵的判定定理，并总结出逆矩阵的计算步骤、给出二阶及三阶的矩阵求逆来巩固新知。逆矩阵的计算与伴随矩阵紧密相连，但对于四阶及以上的矩阵求伴随矩阵计算量较大，用此计算方法显然不利，于是需要探讨其他的计算逆矩阵的办法，即为下一节课学习重点。

2.4 逆矩阵的运算规律

(1) 若A可逆，则A^{-1}亦可逆，且$(A^{-1})^{-1}=A$。

分析：$\because A\cdot A^{-1}=E$，$\therefore (A^{-1})^{-1}=A$。

(2) 若A可逆，数$\lambda\neq 0$，则λA可逆，且$(\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$。

分析：$\because (\lambda A)\cdot(\frac{1}{\lambda}A^{-1})=E$，$\therefore (\lambda A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}A^{-1}$。

(3) 若A，B为同阶方阵且均可逆，则AB亦可逆，且$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

分析：$\because (AB)B^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=A(E)A^{-1}=AA^{-1}=E$，

$\therefore (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

推广$(A_1A_2\cdots A_m)^{-1}=A_m^{-1}\cdots A_2^{-1}A_1^{-1}$。

(4) 若A可逆，则A^{T}亦可逆，且$(A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$。

分析：$\because A^{T}(A^{-1})^{T}=(A^{-1}A)^{T}=E^{T}=E$，$\therefore (A^{T})^{-1}=(A^{-1})^{T}$。

(5) 分块对角矩阵$A=\begin{pmatrix}A_1&&&O\\&A_2&&\\&&\ddots&\\O&&&A_s\end{pmatrix}$，若$|A_i|\neq 0(i=1,2,\cdots,s)$，

则$A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&&&O\\&A_2^{-1}&&\\&&\ddots&\\O&&&A_s^{-1}\end{pmatrix}$。

例 4 设$A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}$，求$A^{-1}$。

解 $A=\begin{pmatrix}5&0&0\\0&3&1\\0&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_1&O\\O&A_2\end{pmatrix}$，

$A_1^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}\end{pmatrix}$，$A_2^{-1}=\frac{1}{|A_2|}A^{*}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&3\end{pmatrix}$，

$\therefore A^{-1}=\begin{pmatrix}A_1^{-1}&O\\O&A_2^{-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{5}&0&0\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}$。

(6) 若A可逆，则有$|A^{-1}|=|A|^{-1}$。

分析：$\because AA^{-1}=E$，$\therefore |AA^{-1}|=|A||A^{-1}|=1$，因此$|A^{-1}|=|A|^{-1}$。

(7) $|A|\neq 0$，定义$A^{0}=E$，$A^{-k}=(A^{-1})^{k}$，K为正整数，

$A^{\lambda}A^{\mu}=A^{\lambda+\mu}$，$(A^{\lambda})^{\mu}=A^{\lambda\mu}$，$\lambda$，$\mu\in Z$。

设计思路：由于矩阵的逆矩阵是线性代数中非常重要的概念，是一种按照固定的规则来计算矩阵逆矩阵的方法，其主要目的是为了解决矩阵中出现的难题。掌握逆矩阵的运算规律，可以熟练地解决相关问题。

2.5 抽象矩阵的逆矩阵计算

抽象矩阵求其逆矩阵，主要有两种方法，利用定义的方法以及分解转化法，接下来分别介绍这两种方法。

2.5.1 定义法

①利用定义求逆矩阵：即找到一个矩阵B，使$AB=E$，则A可逆，且$A^{-1}=B$。

注意：一般情况下不能直接找到矩阵B，可以先得到

$AC=kE(k\neq 0)$，再移项得到矩阵 B。

例 5：设方阵 A 满足 $A^2+A-3E=0$，证明：A，$A+2E$ 都可逆，并求它们的逆矩阵。

证明：由 $A^2+A-3E=0$，得 $A(A+E)=3E\Rightarrow A\frac{A+E}{3}=E$，$\therefore A^{-1}=\frac{A+E}{3}$

又由 $A^2+A-3E=0\Rightarrow(A+2E)(A-E)=E$，$(A+2E)^{-1}=A-E.$

②定义法中可以运用配凑与多项式除法，在下题中，当待求矩阵是多个因式相乘时，可以分别求出每一个因式的逆矩阵再相乘。

例 6：设 n 阶矩阵 A 满足 $A^3=3E$，$B=A^2+2A+E$。证明：B 可逆，并求 B^{-1}。

证明：$\because B=A^2+2A+E=(A+E)^2$，则 B 可逆 $A+E$ 可逆。

由于 $A^3-3E=(A+E)(A^2-A+E)-4E=0$，即 $(A+E)(A^2-A+E)=4E$，则 $A+E$ 可逆，且 $(A+E)^{-1}=\frac{1}{4}(A^2-A+E)$。因此 B 可逆，

2.5.2 分解转化法

①$A+B$ 的上标运算对转置有公式，而 AB 的上标运算对转置、伴随、逆均有公式，因此我们的运算方向应该是将“加减转化为乘积”。

②“E 的恒等变形”方法是求解相关问题的重要思路和方法，其中 E 的位置很关键，改写的形式需要保证可以最大程度的提取公因式。

③若 A，B 均可逆，$A+B$ 不一定可逆，判断 $A+B$ 可逆，需要增加 $A^{-1}+B^{-1}$ 也可逆这个条件。分解转化法具体做法参考下面例题。

例 7：设 A，B 是同阶可逆方阵，且 $E+AB$ 也是可逆方阵，求（$E+A^{-1}B^{-1}$）的逆矩阵。

证明：$\because E+AB=A(A^{-1}+B)=A(A^{-1}B^{-1}+E)B$，由于 A，B 均可逆，则 A^{-1}，B^{-1} 都存在，则 $\because E+A^{-1}B^{-1}=A^{-1}(E+AB)B^{-1}$ 可逆，故 $(E+A^{-1}B^{-1})^{-1}=[A^{-1}(E+AB)B^{-1}]^{-1}=(B^{-1})^{-1}(E+AB)^{-1}(A^{-1})^{-1}=B(E+AB)^{-1}A$。

设计思路：抽象矩阵求解线性代数中的重要内容之一，在解决线性方程组、计算矩阵的行列式和特征值等问题时都具有重要的应用价值。

2.6 逆矩阵的应用——求解矩阵方程

最后，我们来介绍逆矩阵的一个应用，基于保密通信问题的引入，研究求解矩阵方程 - 矩阵方程即含有未知矩阵的矩阵等式。

如何求矩阵方程的解？回顾中学学习的一元一次方程求解方法：

(1) $a=b$，当 $a\neq 0$ 时，$x\neq a^{-1}b$。

(2) $xa=b$，当 $a\neq 0$ 时，$x=ba^{-1}$。

(3) $axb=c$，当 $a\neq 0$ 时，$x=a^{-1}b^{-1}$。

由旧知引出新知，使学生更容易理解和接受抽象矩阵方程求解。

矩阵方程的三种基本形式及解法：

(1) $AX=B$，解法：若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$。

(2) $XA=B$，解法：若 A 可逆，则 $X=BA^{-1}$。

(3) $AXB=C$，解法：若 A、B 都可逆，则 $X=A^{-1}B^{-1}$。

在一种名为“矩阵加密算法”的加密方法中，明文信息被转换为可逆矩阵，然后与一个密匙矩阵相乘。由于密匙矩阵的逆矩阵已知，可以很容易地将加密矩阵解密回原始明文信息。根据矩阵方程的求解公式解决最初提出的问题，设置一个密钥矩阵，当接收信息为 ，求指挥部要传达的信息？

解 $\because AX=B$，若 A 可逆，则 $X=A^{-1}B$。首先求 A^{-1}；

(1) $|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\1&1&2\\0&1&2\end{vmatrix}=-1\neq 0$，则方阵 A 可逆；

(2) $A^*=\begin{pmatrix}0&-1&1\\-2&2&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$；

(3) $A^{-1}=\frac{A^*}{|A|}=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$；

(4) $X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}0&1&-1\\2&-2&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}67&81\\44&52\\43&43\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&9\\3&15\\20&14\end{pmatrix}$。

得到的信息编码是：1，3，20，9，15，14.通过上表查询，即可得到信息为 *action*..

3 总结

本文由情景式导入方法为开端，思政内容上以保卫“家国”为主线，提出保密通信问题，引出教学主要内容。可激发学生爱国热情与内心报国情怀，激起学生的好奇心，提升学生的学习兴趣，自然流露出课堂教学的正能量。教学内容主要包含：逆矩阵的概念，逆矩阵的判定与计算，逆矩阵的运算规律，抽象逆矩阵的计算以及逆矩阵的应用等相关内容。学习本节内容帮助学生将数学知识的学习（知识获取）、数学思想的领悟（能力培养）、道德品质的提升（价值塑造）相结合，实现数学专业知识传授与思想政治教育融通同行，形成协同效应。让学生体会数学之美的同时，潜移默化的弘扬爱国主义和家国情怀，使思政教育“融思于理，如盐入味”直达学生心灵。课程的最后，根据逆矩阵在保密通信问题中的应用，得出指挥部要传达的信息内容，由保密通信问题引入，以保密通信问题结尾，有始有终，起到画龙点睛的作用。

参考文献：

[1] 李智群，李甲聪. 融入课程思政的线性代数教学设计[J]. 教育进展，2023,13(5):2335-2341.

[2] 张林丽，张晶晶，刘德兵，原乃冬. 课程思政元素融入线性代数的教学研究—以逆矩阵为例[J]. 数学学习与研究，2022(4): 21-23.

[3] 官元红，陈丽娟，朱建，陈群，符美芬. 课程思政融入线性代数教学的初探—以南京信息工程大学的线性代数教学为例[J]. 数学学习与研究，2022(4).

[4] 刘海燕. 思政背景下关于逆矩阵的教学设计. 武警警官学院. 四川成都，610000.

[5] 王建军，许建强. 线性代数及其应用[M]. 上海：上海交通大学出版社第四版，2019.

[6] 张四保. 课程思政融入线性代数课程教学的实践[J]. 高师理科学刊，2022(42):78-82.

基金项目：2024 年上海应用技术大学课程思政理论研究课题，项目编号：SITKCSZLL202430；2025 年“上海市高校青年教师培养资助计划”ZZ202512014。

作者简介：李健（1993-），男，汉族，安徽六安人，博士，讲师，研究方向：可积系统方面的研究。