

AI 赋能数学基础理论课程本研衔接探索——以《高等概率论》为例

黄煜可^{1,2} 周清^{1,2} 杨娟^{1,2} 杨建奎^{1,2} 郭永江^{1,2}

1. 北京邮电大学数学科学学院, 中国·北京 100876

2. 数学与信息网络教育部重点实验室(北京邮电大学), 中国·北京 100876

摘要: 本文讨论基于测度论的高等概率论的课程建设问题。主要包括三个议题: 第一, 本科阶段学习的初等概率论与研究生阶段学习的高等概率论的区别与联系, 以及为什么一部分学生(不仅是数学系学生)需要学习基于测度论的高等概率论。第二, 以高等概率论为例, 讨论数学基础理论课程“本研衔接”的难点。第三, 讨论如何在人工智能的辅助下, 判断某类或某位学生需要学习高等概率论中的哪些内容? 以及如何运用“教学内容模块化”, 帮助实现“本研衔接”和个性化教学。

关键词: 测度论; 高等概率论; 本研衔接; 人工智能赋能教育; 教学内容模块化

Artificial intelligence empowers on the link of undergraduate and graduate basic theoretical Education —— taking "Advanced Probability Theory" for instance

Huang Yuke^{1,2}, Zhou Qing^{1,2}, Yang Juan^{1,2}, Yang Jiankui^{1,2}, Guo Yongjiang^{1,2}

1. School of Mathematical Sciences, Beijing University of Posts and Telecommunications (BUPT), China Beijing 100876

2. Key Laboratory of Mathematics and Information Networks(Beijing University of Posts and Telecommunications), Ministry of Education, China Beijing 100876

Abstract: This paper is about the "advanced probability theory" course based on measure theory, including three main contents. (1) The difference and relation between "probability theory" and "advanced probability theory" course. Why a part of students (not only math students) must study the "advanced probability theory" course based on measure theory. (2) Taking "advanced probability theory" for instance, we study the difficulty on the link of undergraduate and graduate basic theoretical education. (3) How to choose contents for different students by Artificial Intelligence (AI), and how to provide personalized education by modularization of teaching content on the link of undergraduate and graduate education.

Keywords: Measure theory; Advanced probability theory; The link of undergraduate and graduate education; Artificial intelligence empowers education; Modularization of teaching content

1 高中 – 本科 – 研究生数学教育衔接的研究现状

一直以来, 数学家和数学教育者都高度关注中学与大学数学教育的衔接问题, 以下简称“高大衔接”问题。德国数学家、哥廷根学派的创始人人菲利克斯·克莱因(Felix Christian Klein, 1849–1925) 在 1908 年出版了名著《高观点下的初等数学》(Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint)。尽管, 克莱因教授在 1908 的第一版序中指出“我向数学界, 特别是向中学数学教师奉献的这一卷新书, 它应该看作是中学数学教学讲义”^[1]。但这本书对数学基础理论课程的本科与研究生阶段教育的衔接问题——简称

“本研衔接”问题——也具有巨大的启发性。

目前, “高大衔接”问题已经取得了丰硕的研究成果, 但与之对应的“本研衔接”问题还没有得到足够的重视。甚至对研究生专业课程的教学研究也不太充分。以《高等概率论》为例, 我们在中国知网和万方数据库中仅找到一篇相关的文章。在这篇文章中, 中国矿业大学(北京)理学院的国洪松老师讨论了“高等概率论”课程的思政建设问题。具体而言, 该文分析了“高等概率论”课程思政建设存在的问题, 从提高教师团队对课程思政建设的重视; 修订教学大纲、教学课件、教学模式, 全方位融入思政元素; 优化考核方式, 培养学生学以致用的能力和实干兴国

的精神三个方面对课程思政建设进行了探索研究^[2]。

2 本科与研究生阶段《概率论》课程的区别与联系

以北京邮电大学为例,几乎所有的理工科学生在本科阶段甚至中学阶段就通过《概率论与数理统计》《概率论与随机过程》等课程学习过《概率论》知识了。本科阶段学习的概率论,通常称为“初等概率论”,它是以微积分为基础的。由于本科阶段知识储备的欠缺,初等概率论中许多基本概念无法严格定义、许多基本理论无法严格证明。例如,初入研究生阶段的学生可能很难回答以下问题:除了离散型和连续型随机变量之外,还有其他类型的随机变量吗?是不是样本空间的所有子集都可以定义概率、都可以被称为随机事件呢?大数定律和中心极限定理分别对应哪种收敛性?随机变量序列有哪几种常用的收敛性?它们之间又有什么区别和联系呢?而研究生阶段学习的概率论,通常称为“高等概率论”,它是以测度论为基础的。通过引入测度论,上述很多问题都可以得到严谨地回答。

2.1 为什么一部分学生需要学习基于测度论的高等概率论

从理论的严谨性看,初等概率论是不够严格的;从体系的完整性看,初等概率论是残缺不全的;从认知的全面性看,初等概率论大多数时候仅仅停留在直觉层面^[3]。要想接近概率论领域的前沿阵地,就需要学习基于测度论的《高等概率论》。《高等概率论》不仅决定了《随机过程论》,《随机排队网络》,《随机分析》,《随机微分方程》等随机数学系列课程的学习深度,也深刻地影响着学生能够在《高等数理统计》,《回归分析》等数理统计课程中崛起的高度,不管学生将来从事概率论、随机过程还是数理统计研究,要想获得足够的理论研究能力,以测度论为基础的《高等概率论》都是学生必须要翻越的大山。显然,基于测度论的《高等概率论》对数学专业、特别是概率统计方向的学生很有帮助。下一小节的几个案例还将展示出《高等概率论》对一些工科专业学生的意义。

2.2 面向工科学生的初等概率论与高等概率论的区别与联系

下文给出三个非数学专业本科生没有学习,但后续研究要用到、在研究生阶段学习的概率论知识,这些知识的本研衔接也可以通过研究生课程《高等概率论》或者《概率论与随机过程》前半段的“高等概率论”内容完成。

实例 1:研究随机变量函数的分布有两种常用方法——分布函数法和变量变换法。但在本科阶段,我们对

变量变换法的讲解主要限于研究一维随机变量函数的分布。囿于课堂时间限制,在多维随机变量函数的分布的研究中,变量变换法最多只能讲解到单分支情况,需要在研究生阶段再学习多分支情况。

实例 2: C. E. 香农在《通信的数学理论》(A Mathematical Theory of Communication) 中将通信系统粗略地分为三大类:离散系统、连续系统、混合系统,前两者分别对应本科概率课程中学习的离散型随机变量和连续型随机变量。而混合系统对应的混合型随机变量在本科课程中并未提及,需要在研究生阶段的“高等概率论”课程中补充。

实例 3: 约翰 J. 申克在国外电子电气工程技术经典教材《概率、随机变量和随机过程在信号处理中的应用》中大量使用了测度理论。特别的,使用了图 1 下侧基于 Stieltjes 积分的数学期望的统一定义(对离散型、连续型、混合型随机变量均适用),这在目前面向非数学专业本科生的概率系列课程教材中并未讲授,但在后续工科专业书籍中广泛使用,也亟须在研究生课程中补充。

$$E(X) = \begin{cases} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i & \text{当 } X \text{ 为离散型随机变量} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx & \text{当 } X \text{ 为连续型随机变量} \end{cases}$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x dF(x) \quad \text{数学期望的统一定义}$$

图1 数学期望的定义——本研对比

2.3 高等概率论“本研衔接”的难点

虽然目前已经有不少优秀的《高等概率论》教材,比如钟开莱先生(Kai Lai Chung, 1917-2009)所著《概率论教程》等等。但由于增加了测度论,研究生(硕博)阶段的《高等概率论》通常与本科阶段的《初等概率论》呈现出完全不同的形态,使得学生感觉是在学习一门全新的课程,难以与本科阶段的知识贯通衔接。可见,以“高等概率论”为代表的数学基础理论教育的“本研衔接”问题非常普遍也亟须解决。这也是我们想要探索人工智能赋能《高等概率论》等基础理论教育“本研衔接”问题的初衷。

3 运用“人工智能赋能”实现本研衔接

1956 年的达特茅斯会议标志着人工智能(Artificial Intelligence, AI)的诞生。在不到 70 年的时间里,作为第四次工业革命的标志性技术——人工智能,正深刻地改变着人类的各项活动,并在教育领域展现出丰硕的研究成果和蓬勃的应用潜力。2023 年,习近平总书记在中共中央政治局第五次集体学习时指出:“教育数字化是我国开辟教育发

展新赛道和塑造教育发展新优势的重要突破口”。教育部部长怀进鹏在 2024 世界数字教育大会开幕式上表示,将实施人工智能赋能系统,促进智能技术与教育教学相结合。

3.1 人工智能赋能教育的丰硕成果

人工智能的发展为教育提供了新的契机和挑战。人工智能与数学等基础学科的结合包含两个方面的研究内容。一方面,是如何在不同教学阶段开展人工智能教育?例如,法国索邦大学计算机科学名誉教授、巴黎六大计算机科学实验室成员让-加布里埃尔·加纳夏(Jean-Gabriel Ganascia)教授指出:教育工作者不仅要向学生传授人工智能相关技术技能,更要传授如何理解人工智能和数字技术在专业、公共及私人领域应用中所引发的人文和伦理挑战^[4]。北京航空航天大学软件学院邓攀教授则探讨了人工智能课程中数学基础的教学体系,深入分析了当前人工智能课程中学生数学基础薄弱的问题,并强调在人工智能课程中图论、博弈论、贝叶斯理论和马尔可夫模型等数学基础的不可或缺性^[5]。另一方面,是如何将人工智能赋能到不同的教学阶段?本文主要研究后者,特别是如何将人工智能赋能到高等院校数学教育。例如,西北工业大学都琳教授、徐爽副教授、西安交通大学徐宗本院士提出了“师-生-AI 协同课堂”的模式。该课堂将一个知识单元的教学按导论课、研讨课、总结课“三步法”组织。导论课由教师主持,“以提出问题为中心”为学生设置学习任务与场景;研讨课由学生在人工智能大模型辅助下,完成“以分析问题为中心”的协同研讨和自主学习;总结课除学生代表交流学习成果外,由教师“以解决问题为中心”完成知识归纳并指引本知识单元的价值意义与未来发展^[6]。中国矿业大学邵虎教授等人则结合所在高校理工科特色,充分发挥人工智能辅助工具优势,从“人工智能辅助、延伸课堂内容”;“构建知识图谱、形成可视化网络”;“构建跨学科网络、人工博弈倒逼教学内容更新”等三个维度提出了一系列人工智能辅助大学数学公共基础课教学内容的改革策略^[7]。

3.2 预备工作:“教学内容模块化”

为了实现教学内容和学习资源的个性化推荐,在构建完善的知识体系的同时,还需要将教学内容模块化。将教学内容模块化,从而根据学生学习基础和专业发展需求,以学生为中心,灵活调整教学内容^[8]。当然,这里的“模块化”并不是把完整的数学知识碎片化,而是在保持完整知识体系的基础上,根据学生的能力和需求,将一部分内容从本科阶段的初等概率论拓展到研究生阶段的高等概率

论内容。也就是从测度论的角度带领学生重新认识本科熟悉的样本空间、概率、随机变量、分布函数、数字特征、极限理论等概念。每一个知识点的引入和拓展,都尽量先展示它的必要性(为什么要学习这部分内容),也就是本科阶段的初等概率论中学习这些内容时忽略的问题。从而避免学生感觉是在学习一门全新的课程,充分利用本科阶段已知的知识,达到更好地学习效果,实现本研衔接。

3.3 基于“人工智能”的教学内容推荐

运用人工智能方法可以评估一个学生是否需要学习基于测度论的《高等概率论》,以及需要学习《高等概率论》中的哪些知识模块。我们知道:学习更多、更扎实的数学知识将帮助学生更好地探索学科前沿、取得深刻的研究成果。然而,学生的学习精力是有限的,不可能面面俱到的学习各个领域的知识,必须有所取舍。基于人工智能赋能可以评估一个学生是否需要进一步学习基于测度论的《高等概率论》,实现教学内容和学习资源的个性化推荐。评估的主要参数包括:学生的学习基础、学习能力和未来发展需求。

这不是一个简单的问题,有必要使用人工智能实现个性化的精准判断。

问题一:哪些学生适合且需要学习《高等概率论》呢?《高等概率论》是概率统计专业研究生的专业选修课。它为很多概率统计后续专业课程的学习和研究打下了良好基础。但只有概率统计专业研究生或者数学专业研究生才需要基于测度论的《高等概率论》吗?并不是。如前所述,不少非数学专业的学生为了更好地完成本专业的后续学习和研究,也需要补充基于测度论的概率知识。

问题二:是不是需要学习《高等概率论》的学生,他们的学习需求完全一致呢?答案是否定的。仅以“集类”这个知识点为例,概率统计专业的学生为了能够正确理解卡拉西奥多里(Carathéodory)测度扩展定理,必须学习 π 类、集代数等多种常见的集类概念。但大部分工科专业学生仅需要理解概率空间三元素的含义,特别是相对本科二元素记号增加的事件域是什么?因此,把对“集类”的学习重点设计为域和集合生成的最小域即可。进一步地,对于工科学生而言,概率论通常以工具的形式出现。所以学习的目的是能正确理解相关专业书籍中出现的测度论和高等概率论概念即可。当然,对于学习能力较强、后续理论研究需求较高的非数学专业学生,也可以根据自身的能力和选择学习更深入的概率知识。

4 结语

本文以《高等概率论》为例探索了通过分析本研阶段课程知识的区别与联系、运用“教学内容模块化”和基于人工智能的教学内容个性化推荐的“本研衔接”思路。希望能为解决数学基础理论课程的“本研衔接”问题抛砖引玉、尽绵薄之力。

参考文献:

[1] [德] 菲利克斯·克莱因 著. 舒湘芹, 陈义章, 杨钦樑 译. 齐民友 审. 高观点下的初等数学, *Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint*[M]. 华东师范大学出版社. 2020-11.

[2] 国洪松. “高等概率论”课程思政建设的探索[J]. 教育教学论坛, 2022(17):141-144.

[3] 袁德美, 王学军 编著. 测度论基础与高等概率论[M]. 科学出版社, 2023-04.

[4] 让-加布里埃尔·加纳夏, 张婧妍, 赵琳. 高等教育中人工智能教育的若干挑战[J]. 清华大学教育研究, 2025, 46(1):10-16.

[5] 邓攀. 人工智能课程中数学基础的教学体系探讨[C]//2024 中国高校计算机教育大会论文集, 2024:1-8.

[6] 都琳, 徐爽, 徐宗本. 师-生-AI 协同课堂: 人

工智能赋能大学数学教育的载体及实践[J]. 中国大学教学, 2025, 81(4):59-65.

[7] 邵虎, 邵枫, 朱士信. 基于人工智能辅助大学数学公共基础课教学内容改革实践与探索[J]. 大学数学, 2025, 41(3):26-31.

[8] 黄煜可, 闵祥伟, 胡细宝, 焦荣珍. 基于工程教育专业认证的概率系列课程“一体两翼”的教学设计[J]. 北京邮电大学学报(社会科学版), 2022, 24(5):92-101.

基金项目: 北京邮电大学 2025 年研究生教改项目《基于 AI 赋能的概率论课程本硕博贯通培养模式设计及资源建设》(2025YY027); 北京邮电大学数学科学学院 2025 年科普实验室自主研发演示项目《数学与信息科技科普实验室分形几何模块、几何学模块、趣味数学模块建设》, 2025 年促进数学学科发展计划(530625004); 北京邮电大学数学系 2024 年教学改革专项项目《大模型时代背景下概率论课程体系建设——“本-硕-博”贯通培养模式》。

作者简介: 黄煜可(1985.01-), 女, 汉族, 四川成都人, 博士, 副教授, 硕士生导师, 科学研究方向: 代换序列、分形几何及其应用; 教学研究方向: 概率论与数理统计、高等概率论。