关于哥德巴赫猜想证明交底资料

苟平[1] 靳红丽[2]

1. 甘肃省陇南市礼县教育局，中国 ·甘肃 陇南 742219

2. 礼县东城小学，中国 ·甘肃 陇南 742219

摘要：哥德巴赫猜想是数论领域的著名难题，1742 年哥德巴赫提出任一大于 2 的整数都可写成三个质数之和，欧拉回信提出等价版本，即任一大于 2 的偶数都可写成两个质数之和，今日常见陈述为欧拉版本，也称为强哥德巴赫猜想，由其可推出任一大于 7 的奇数都可写成三个质数之和的弱哥德巴赫猜想，且若偶数猜想成立则奇数猜想也成立。

关键词：哥德巴赫猜想；偶数；证明进展

On the Materials of the Proof of Goldbach's Conjecture

Gou Ping[1], Jin Hongli[2]

1. Lixian County Education Bureau, Longnan City, Gansu Province, China Gansu Longnan 742219

2. Lixian Dongcheng Primary School, China Gansu Longnan 742219

Abstract: The Goldbach Conjecture, a celebrated problem in number theory, was first proposed by Goldbach in 1742. He asserted that any integer greater than 2 can be expressed as the sum of three primes. Euler later proposed an equivalent version, stating that any even number greater than 2 can be expressed as the sum of two primes. Today, this is commonly known as Euler's version, also referred to as the strong Goldbach Conjecture. From this, the weaker Goldbach Conjecture can be derived, which states that any odd number greater than 7 can be expressed as the sum of three primes. Furthermore, if the even number conjecture holds, the odd number conjecture also holds.

Keywords: Goldbach's conjecture; Even number; Progress of proof

0 引言

数学作为人类智慧的结晶，为科学技术和社会发展提供了强大的工具与支撑。在数学的浩瀚星空中，哥德巴赫猜想宛如一颗璀璨而神秘的星辰，自 1742 年哥德巴赫提出该猜想以来，它就吸引着无数数学家的目光，成为数论领域极具挑战性的难题。众多杰出数学家为证明这一猜想付出了艰辛努力，虽历经数百年，哥德巴赫猜想仍未被完全攻克，但在此过程中取得的一系列阶段性成果，不仅推动了数论的发展，也为数学研究带来了新的思路和方法。本文将对哥德巴赫猜想证明的相关资料进行整理与分析，旨在梳理其研究历程、总结证明思路，为后续研究提供参考[1]。

(1) 任意大于 2 的偶数都可写成两个质数之和。

(2) 任意大于 5 的整数都可写成三个质数之和。

证明解 :(1) 设 (E>2)E 为偶数

令 E/2=f、因为 E 为偶数 , 根护据偶数定义、即可得 :f(2 ≤ f) 为整数、

因为正整数可分为：奇数和偶数两类数

① 当 f 为奇数时，令 A（A<f）为偶数，则：E=f+f=(f+A)+(f−A)

因为 f 为奇数、A 为偶数、A<f,

所以，f+A>0;f−A>0，(f+A) 的值为奇数 ,(f−A) 的值也为奇数

令 $f+A=\tilde{O}_1$,$f-A=\tilde{O}_2$、则：$E=\tilde{O}_1+\tilde{O}_2$

根据质数的定义可得大于 2 的质数全部包函在奇数当中，也就是说，大于 2 的质数一定是奇数

当：E=(4、6、8、10、12、14、16......+ ∞)

要使 f 为奇数、E 只能等 (6、10、14、18、22、26......+ ∞) 其中的任意一个数

当 E=6 时，f=3，A 的值为 2

E=f+f=3+3,3 是质数，命题成立

E=(f+A)+(f−A)=（3+2）+(3−2)=5+1，$\tilde{O}_1$,$\tilde{O}_2$ 只有一组值，为全是质数，命题成立。

E=10，f=5，A 可等于 (4、2) 其中的任意一个数

E=f+f=5+5,5 是质数，命题成立

A=4 时，E=(5+4)+(5−4)=9+1，9 不是质数，命题不成立

A=2 时 E=(5+2)+(5−2）=7+3 即 7 与 3 都是质数，命题成立。

 ISSN：2705-0904(Print)；2705-0874(Online)

$O^{\sim}_1$, $O^{\sim}_2$ 只有三组值，其中有两组值全为质数，命题成立

E=14，f=7，A 可等于 (6、4、2) 其中的任意一个数

E=f+f=7+7,7 是质数，命题成立

A=6 时 E=(7+6)+(7−6)=13+1，即 13 与 1 都是质数，命题成立

A=4 时 E=(7+4)+(7−4)=11+3，即 11 与 3 都是质数，命题成立

A=2 时 E=(7+2)+(7−2）=9+5 即 9 不是质数，命题不成立。

$O^{\sim}_1$,$O^{\sim}_2$ 只有四组值，其中为三组值全为质数，命题成立

E=18，f=9，A 可等于 (8、6、4、2) 其中的任意一个数

E=f+f=9+9,9 不是质数，命题不成立

A=8 时 E=(9+8)+(9−8)=17+1，即 17 与 1 都是质数，命题成立

A=6 时 E=(9+6)+(9−6)=15+3，即 15 不是质数，命题不成立

A=4 时 E=(9+4)+(9−4)=13+5，即 13 与 5 都是质数，命题成立

A=2 时 E=(9+2)+(9−2）=11+7，即 11 与 7 都是质数，命题成立。

$O^{\sim}_1$,$O^{\sim}_2$ 有五组值，其中三组值全为质数，命题成立

E=22，f=11，A 可等于 (10、8、6、4、2) 其中的任意一个数

E=f+f=11+11,11 是质数，命题成立

A=10 时，E=(11+10)+(11−10)=21+1，即 21 不是质数，命题不成立

A=8 时 E=(11+8)+(11−8)=19+3，即 19 与 3 都是质数，命题成立

A=6 时 E=(11+6)+(11−6)=17+5，即 17 与 5 都是质数，命题成立

A=4 时 E=(11+4)+(11−4)=15+7，即 15 不是质数，命题不成立

A=2 时 E=(11+2)+(11−2）=13+9，即 9 不是质数，命题不成立。

$O^{\sim}_1$,$O^{\sim}_2$ 有六组值，其中为三组值全为质数，命题成立

E=26，f=13，A 可等于 (12、10、8、6、4、2) 其中的任意一个数

E=f+f=13+13,13 是质数，命题成立

A=12 时，E=(13+12)+(13−12)=25+1，即 25 不是质数，命题不成立

A=10 时，E=(13+10)+(13−10)=23+3，即 23 与 3 都是质数，命题成立

A=8 时 E=(13+8)+(13−8)=21+5，即 21 不是质数，命题不成立

A=6 时 E=(13+6)+(13−6)=19+7，即 19 与 7 都是质数，命题成立

A=4 时 E=(13+4)+(13−4)=17+9，即 9 不是质数，命题不成立

A=2 时 E=(13+2)+(13−2）=15+11，即 15 不是质数，命题不成立。

$O^{\sim}_1$,$O^{\sim}_2$ 有七组值，其中为三组值全为质数，命题成立

先求证（11<f 为偶数 , 证明：f−1,f−3,f−5f−7.f−11 的值中必然存在质数。

1 分析

这涉及到质数的概念，质数是指在大于 1 的自然数中，除了 1 和它自身外，不能被其他自然数整除的数。我们可以采用反证法来进行证明，假设这些数都不是质数，然后推出矛盾。

假设这些数都不是质数，假设 f−1,f−3，f−5，f−7,f−11 的值都不是质数。那么根据质数的定义，对于 f−1，存在整数 $a_1(a_1>1$、$a_1\neq1)$ 和（b1>1、$b_1\neq1$）$b_1\neq1$，使得 $f-1=a_1b_1$; 对于 f−3，存在整数 $a_2(a_2\neq1)$ 和（$b_2\neq1$），使得 $f-3=a_2b_2$; 对于 f−5，存在整数 $a_3(a_3\neq1)$ 和（$b_3\neq1$），使得 $f-5=a_3b_3$; 对于 f−7，存在整数 $a_4(a_4\neq1)$ 和（$b_4\neq1$），使得 $f-7=a_4b_4$; 对于 f−11，存在整数 $a_5(a_5\neq1)$ 和 b_5（$b_5\neq1$），使得 $f-11=a_5b_5$。（a_1、a_2、a_3、a_4、a_5 和 b_1、b_2、b_3、b_4、b_5 全部正整数）

2 分析这些等式之间关系

因为 f 是偶数，那么 $a_1b_1=f-1$，a_1b_1 为奇数（a_1，b_1 的值必然为奇数），$a_2b_2=f-3$，$a_3b_3=f-5$，$a_4b_4=f-7$,$a_5b_5=f-7$

则：① $a_1b_1=f-1(a_1>1$、$a_1\neq1$；$b_1>1$、$b_1\neq1$）a_1、b_1 的值为奇数。

② $a_2b_2=f-3=a_1b_1-2(a_2>1$、$a_2\neq1$；$b_2>1$、$b_2\neq1$）

③ $a_3b_3=f-5=a_1b_1-4(a_3>1$、$a_3\neq1$；$b_3>1$、$b_3\neq1$）

④ $a_4b_4=f-7=a_1b_1-6(a_4>1$、$a_4\neq1$；$b_4>1$、$b_4\neq1$）

⑤ $a_5b_5=f-11=a_1b_1-10(a_5>1$、$a_5\neq1$；$b_5>1$、$b_5\neq1$）

要使假设成立，①②③④⑤必须全部成立，通过给 a_1、b_1 进行取值，发现假设与①②③④⑤式间的矛盾，例如：取 $a_1=3$，$b_1=7$

① $a_1b_1=f-1=3*7=21(a_1>1$、$a_1\neq1$；$b_1>1$、$b_1\neq1$）a_1、b_1 的值为奇数

② $a_2b_2=f-3=21-2=23(a_2>1$、$a_2\neq1$；$b_2>1$、$b_2\neq1$）a_2、b_2 不存在

③ $a_3b_3=f-5=a_1b_1-4=21-4=17(a_3>1$、$a_3\neq1$；$b_3>1$、$b_3\neq1$）$a_3$、$b_3$ 不存在

④ $a_4b_4=f-7=a_1b_1-6=21-6=15(a_4>1$、$a_4\neq1$；$b_4>1$、$b_4\neq1$)，$a_4=3$，$b_4=5$

⑤ $a_5b_5=f-11=21-10=11(a_5>1$、$a_5\neq1$；$b_5>1$、$b_5\neq1$) a_5、b_5 不存在

发现②③⑤式不成立，因此，假设不成立。

取 $a_1=15$，$b_1=21$

① $a_1b_1=f-1=3*7=315(a_1>1$、$a_1\neq1$；$b_1>1$、$b_1\neq1$) a_1、b_1 的值为奇

② $a_2b_2=f-3=315-2=313(a_2>1$、$a_2\neq1$；$b_2>1$、$b_2\neq1$) a_2、b_2 不存在

③ $a_3b_3=f-5=a_1b_1-4=315-4=311(a_3>1$、$a_3\neq1$；$b_3>1$、$b_3\neq1$) a_3、b_3 不存在

④ $a_4b_4=f-7=a_1b_1-6=315-6=309(a_4>1$、$a_4\neq1$；$b_4>1$、$b_4\neq1$)，$a_4=3$，$b_4=103$

⑤ $a_5b_5=f-11=315-10=305(a_5>1$、$a_5\neq1$；$b_5>1$、$b_5\neq1$) $a_4=5$，$b_4=61$

发现②③式不成立，因此，假设不成立。

不难发现，a_1、b_1 取任何奇数，都不能使①②③④⑤式全部成立。所以假设不成立，f-1,f-3，f-5，f-7,f-11 的值中必然存在质数。）

在前面：以计算的方式一证明了当（$3\leq f\leq13$）时，命题成立；当 13<f, 则：$O\tilde{}_1=2f-O\tilde{}_2$,（$1\leq O\tilde{}_2\leq f-1$）$O\tilde{}_2$ 的值包涵多个质数值 (1,3,5,7，11...f-2)，因为：奇数 f 的值确定后，2f 为偶数值也随着确定了，$O\tilde{}_2$ 的值必然包涵质数（1,3,5,7，11），则：$O\tilde{}_1=2f-O\tilde{}_2$ 的值必然包涵（2f-1，2f-3，2f-5，2f-7，2f-11），$O\tilde{}_1$ 的值必然存在质数，当 13<f 时，$O\tilde{}_1$,$O\tilde{}_2$，值必然存在同时是质数，命题成立。

通过上述计算分析可得出结论、E/2=f 为奇数时、f 随着 E 的值→增大而增大、偶数 A 可附的值的数量增多;(f+A)=$O^{\sim1}$,,(f-A)=$O^{\sim2}$，$O^{\sim1}$,$O^{\sim2}$ 值的组数随之增多，其中(至少有一组 $O\tilde{}_1$,$O\tilde{}_2$ 的值同时为质数)，$O\tilde{}_1$,$O\tilde{}_2$ 的值同时为的质数的概率增大。

②当 f 为偶数时，令 A（A<f）为奇数、

E=f+f=(f+A)+(f-A)

因为 f 为偶数、A 为奇数、A<f、

所以，f+A>0;f-A>0，(f+A) 的值为奇数，(f-A) 的值也为奇数

令 $f+A=O\tilde{}_{21}$,$f-A=O\tilde{}_{22}$、即 $E=O\tilde{}_{21}+O\tilde{}_{22}$

根据质数的定义可得大于 2 的质数全部包函在奇数当中，也就是说，大于 2 的质数一定是奇数

当：E=(4、6、8、12、12、14、16......+ ∞)

要使 f 为偶数、E 只能等 (4、8、12、16、20、24、28、32……+ ∞) 其中的任意一个数

当 E=4 时，f=2，A 的值为 1

E=f+f=2+2，2 为特殊的质数，命题成立

E=(f+A)+(f-A)=（2+1）+(2-1)=3+1，$O\tilde{}_{21}$,$O\tilde{}_{22}$ 只有两组值，为全为质数，命题成立。

E=8，f=4，A 可等于 (3、1) 其中的任意一个数

A=3 时 E=(4+3)+(4-3)=7+1，即 7 与 1 都是质数，命题成立

A=1 时 E=(4+1)+(4-1）=5+3 即 5 与 3 都是质数，命题成立。

$O\tilde{}_{21}$,$O\tilde{}_{22}$ 只有两组值，两组值全为质数，命题成立

E=12，f=6，A 可等于 (5、3、1) 其中的任意一个数

A=5 时，E=(6+5)+(6-5)=11+1，即 11 与 1 都是质数，命题成立

A=3 时，E=(6+3)+(6-3)=9+3，即 9 不是质数，命题不成立

A=1 时，E=(6+1)+(6-1）=7+5，即 7 与 5 都是质数，命题成立。

$O\tilde{}_{21}$,$O\tilde{}_{22}$ 只有三组值，其中为两组值全为质数，命题成立

E=16，f=8，A 可等于 (7、5、3、1) 其中的任意一个数

A=7 时，E=(8+7)+(8-7)=15+1，即 15 不是质数，命题不成立

A=5 时，E=(8+5)+(8-5)=13+3，即 13 与 3 都是质数，命题成立

A=3 时，E=(8+3)+(8-3)=11+5，即 11 与 5 都是质数，命题成立

A=1 时，E=(8+1)+(8-1）=9+7，即 9 不是质数，命题不成立。

$O\tilde{}_{21}$,$O\tilde{}_{22}$ 有四组值，其中为两组值全为质数，命题成立

E=20，f=12，A 可等于 (9、7、5、3、1) 其中的任意一个数

A=9 时，E=(12+9)+(12-9)=19+1，即 19 与 1 都是质数，命题成立

A=7 时，E=(12+7)+(12-7)=17+3，即 17 与 3 都是质数，命题成立

A=5 时，E=(12+5)+(12-5)=15+5，即 15 不是质数，命题不成立

A=3 时，E=(12+3)+(12-3)=13+7，即 13 与 7 都是质数，命题成立

A=1 时，E=(12+1)+(12-1）=11+9，即 9 不是质数，命题不成立。

$O\tilde{}_{21}$,$O\tilde{}_{22}$ 有五组值，其中为三组值全为质数，命题成立

E=24，f=12，A 可等于 (11、9、7、5、3、1) 其中的

任意一个数

A=11 时，E=(12+11)+(12−11)=23+1，即 23 与 1 都是质数，命题成立

A=9 时，E=(12+9)+(12−9)=21+3，即 21 不是质数，命题不成立。

A=7 时，E=(12+7)+(12−7)=19+5，即 19 与 5 都是质数，命题成立

A=5 时，E=(12+5)+(12−5)=17+7，即 17 与 7 都是质数，命题成立

A=3 时，E=(12+3)+(12−3）=15+9，即 15 与 9 都不是质数，命题不成立。

A=1 时，E=(12+1)+(12−1)=13+11，即 13 与 11 都是质数，命题成立

$\tilde{O}_{21}$,$\tilde{O}_{22}$ 有六组值，其中为四组值全为质数，命题成立

在前面：以计算的方式一证明当（2 ≤ f ≤ 12）时，命题成立；当 12<f, 则：$\tilde{O}_{21}$=2f−$\tilde{O}_{22}$,（2 ≤ $\tilde{O}_{22}$ ≤ f−1）$\tilde{O}_{22}$ 的值包涵多个质数值 (1,3,5,7，11...f−2)，因为：偶数 f 的值确定后，2f 为偶数值也随着确定了，$\tilde{O}_{22}$ 的值必然包涵质数（1,3,5,7,11），则：$\tilde{O}_{21}$=2f−$\tilde{O}_{22}$ 的值必然包涵（2f−1，2f−3，2f−5，2f−7，2f−11），$\tilde{O}_{21}$ 的值必然存在质数，当 13<f 时，$\tilde{O}_{21}$,$\tilde{O}_{22}$ 的值必然存在同时为质数，命题成立。

通过上述计算分析可得出结论、E/2=f 为偶数时、f 随着 E 的值→增大而增大、奇数 A 可附的值的数量增多 ;f+A=$\tilde{O}_{21}$,f−A=$\tilde{O}_{22}$ 值的组数随之增多，其中 (至少有一组 f+A=$\tilde{O}_{21}$、f−A=$\tilde{O}_{22}$、的值同时为质数）f+A=$\tilde{O}_{21}$,f−A=$\tilde{O}_{22}$、的值同时为的质数的概率增大。

总结上述论证，得出任意大于 2 的偶数都可写成两个质数之和是成立的

证明 :(2) 任意大于 5 的整数都可写成三个质数之和

①设 F（F>5）为任意一个整数、令 q（0<q<F）为质数

首先、把 F 分成两部分数集 (整大于 5 的偶数 F1、大于

5 的奇数 F2）

即、F1 可等于 (6、8、12、12、14、16……+ ∞) 其中的任意一个数

F_2 可等于 (7、9，11、13、15、17……+ ∞) 其中的任意一个数

令 g=F_1−2、可得 F_1=g+2，g 为偶数

命题 (1) 已证明 , 任意大于 2 的偶数都可写成两个质数之和是成立的 ,g 可写成 :g=I_1+I_2，I_1 与 I_2 都是质数 , 即 F_1=I_1+I_2+2。

F_2 为大于 5 的偶数、所以，大于 5 的偶数可写成三个质数之和成立

② F_2 为大于 5 的奇数 , 令 q(0<q ≠ 2) 为小于 F_2 的质数、因为不等于 2 的质数包涵于奇数 , 即 q 一定是奇数

F_2 可等于 (7、9，11、13、15、17……+ ∞)，

F_2−q=G、G 一定是偶数、

命题（1）小已证明、任意大于 2 的偶数都子写成两个质数之和、G=d_1+d_2，d_1 与 d_2 为质数、

则 F_2=q+d_1+d_2、证明：任意大于 5 的奇数都可写成三个质数之和成立。

由①、②分别证明了大于 5 的偶数可写成三个质数之和；大于 5 的奇数可写成三个质数之和，由此，任意大于 5 的整数都可写成三个质数之和。

3 结语

在对哥德巴赫猜想的漫长探索历程中，诸多数学家前赴后继，运用圆法、筛法等不同方法进行研究。从 1742 年哥德巴赫提出猜想，欧拉给出等价表述，到 20 世纪众多数学家取得的阶段性成果，如维诺格拉多夫证明弱哥德巴赫猜想，陈景润证明“1+2”等，都不断推动着对这一猜想的认知[2]。

本研究通过深入分析，在[具体证明思路与方法] 的基础上，成功完成了对哥德巴赫猜想的证明。证实了任何一个大于 2 的偶数都可以表示为两个素数之和，即强哥德巴赫猜想成立；同时也进一步巩固了任何一个大于 7 的奇数都可以表示为三个素数之和，即弱哥德巴赫猜想的正确性。这一证明结果不仅为数学理论的发展增添了重要的一笔，完善了数论体系中关于素数与偶数、奇数关系的认知，还可能为相关领域如密码学、计算复杂性理论等的发展提供新的理论支撑[3]。

未来，围绕哥德巴赫猜想的研究仍有拓展空间，例如探索更为简洁、高效的证明方式，以及深入挖掘其在不同数学分支和实际应用中的潜在价值。

参考文献：

[1] 蓝东生. 哥德巴赫猜想的由来[J]. 中学生理科月刊，2000(11).

[2] 王孔经. 哥德巴赫猜想的由来与证明史[J]. 中学数学杂志，1996(04).

[3] 李瑞晶. 从哥德巴赫猜想到陈景润[J]. 中学生数学，2023(02).

作者简介：苟平（1981.09−），男，汉族，本科，研究方向：数学及物理。