ISSN：2705-0904(Print)；2705-0874(Online)

解三角形建模与思维培养研究——以2023年新高考全国二卷第17题为例

梁燕[1] 徐立海[2] 许根[1]
1. 南充高级中学，中国·四川 南充 637500
2. 北师大台州附中，中国·浙江 台州 318020

摘要：解三角形作为高中数学的重要内容，不仅是三角函数知识的深化应用，更是沟通代数与几何的关键桥梁。2023 年新高考全国二卷第 17 题，以三角形面积、中线长度等条件为载体，巧妙地设置了求解边长的问题，极具代表性和研究价值。深入剖析这道题，探索其多种解法及背后的数学模型，对于培养学生的创造性思维、提升数学素养有着重要意义。它能帮助学生打破思维定式，学会从不同角度审视问题，掌握将复杂问题转化为数学模型求解的方法。
关键词：解三角形；数学模型；创造性思维；多解策略

Research on Triangle Solving Modelling and Thinking Development: Taking Question 17 of the 2023 New College Entrance Examination Paper II as an Example

Liang Yan[1], Xu Lihai[2], Xu Gen[1]
1. Nanchong Senior High School, China Sichuan Nanchong 637500
2. Affiliated High School of Beijing Normal University Taizhou, China Zhejiang Taizhou 318020

Abstract: Solving triangles, as an important part of high school mathematics, is not only a deep application of trigonometric knowledge but also a crucial bridge connecting algebra and geometry. In 2023, question 17 of the National College Entrance Examination Paper II cleverly set a problem of finding side lengths using conditions such as the area of a triangle and median lengths, making it highly representative and valuable for study. A thorough analysis of this question, exploring its multiple solutions and underlying mathematical models, is of great significance for cultivating students' creative thinking and enhancing their mathematical literacy. It can help students break fixed thinking patterns, learn to view problems from different perspectives, and master the method of transforming complex problems into mathematical models for solving.
Keywords: Solving triangles; Mathematical models; Creative thinking; Multiple solution strategies

1 试题呈现

（2023 年新高考全国二卷第 17 题）记 ΔABC 的内角 A、B、C 的对边分别为 a、b、c，已知 ΔABC 的面积为$\sqrt{3}$，D 为 BC 的中点，且 AD=1。

（1）略。

（2）若 $b^2+c^2=8$，求 b、c。

2 建构数学模型，培养创造性发散思维

在解三角形的学习中，面对复杂的问题情境，如何引导学生突破常规思路，构建有效的数学模型是教学的关键。以 2023 年新高考全国二卷第 17 题为例，我们可以发现，从不同角度思考，能构建多种独特的数学模型，这些模型不仅能巧妙解决问题，还能极大地锻炼学生的创造性思维。

2.1 构建直角三角形模型，巧搭桥梁建立边的关联

在求解边长 b、c 时，关键是将 AD 与 b、c 联系起来，为此作高 AE, 设 BC=a，∠ $ADC=\alpha$。分别在 ΔABE、ΔAEC 中利用勾股定理得

$$c^2=(sin\alpha)^2+(\frac{a}{2}+cos\alpha)^2，b^2=(sin\alpha)^2+(\frac{a}{2}-cos\alpha)^2;$$

两式相加并结合 $b^2+c^2=8$，解得$a=2\sqrt{3}$；再利用面积条件$\sqrt{3}=\frac{1}{2}a\cdot sin\alpha$得，$sina=1$ 故 α =，最终求得 $b=c=2$。该方法通过构造辅助线与参数，整合多边关系，不仅能有效解决问题，更能培养转化与建模的数学思维。

2.2 构建角度合成模型，活用正弦定理与两角和正弦公式建立角的关联

构建角度合成模型求解 b、c 时，需建立第二个关于 b、c 的方程。利用面积公式 $\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\cdot sin\angle BAC$（其中 $\theta=\angle BAC$），可通过正弦定理与两角和公式将 $sin\theta$ 与边长关联。设∠ $BAD=\theta_1$，∠ $DAC=\theta_2$，则 $\theta=\theta_1+\theta_2$。在 ΔABD 和 ΔADC 中运用正弦定理可得：

$$\frac{a/2}{sin\theta_1}=\frac{c}{sin\alpha}，\frac{a/2}{sin\theta_2}=\frac{b}{sin\alpha}。$$

 ISSN：2705-0904(Print)；2705-0874(Online)

结合面积条件$\sqrt{3}=\frac{1}{2}a\cdot sin\alpha$ 可得$sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{c}$，$sin\theta_1=\frac{\sqrt{3}}{b}$。代入 $sin\theta=sin\theta_1cos\theta_2+cos\theta_1sin\theta_2$ 并整理得$\sqrt{c^2-3}+\sqrt{b^2-3}=2$ 联立已知 $b^2+c^2=8$，解得 $b=c=2$。该方法运用正弦定理与两角和正弦公式，展现了创造性思维。

2.3 构建平行四边形模型，创造性应用向量合成建立边角关联

利用向量方法求解时，考虑以 AB、AC 为邻边构造平行四边形 ABFC，由 D 为 BC 中点，可得 AF=2AD。根据平行四边形法则可得 $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$。

对上式进行模长平方得：$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=4|\overrightarrow{AD}|^2=4$；

向量展开得：$b^2+c^2+2bc\cdot cos\angle BAC=4$；

在 ΔABC 中，利用余弦定理得：

$a^2=b^2+c^2+2bc\cdot cos\angle BAC$

联立以上两式得：$a^2=2b^2+c^2\cdot 4$，又 $b^2+c^2=8$；

解得：$a=2\sqrt{3}$，$bc\cdot cos\angle BAC=-2$；

面积公式：$\frac{1}{2}bc\cdot sin\angle BAC=\sqrt{3}$；

解得，$tan\angle BAC=-\sqrt{3}$，$\angle BAC=-\frac{2}{3}\pi$；

将上述数据代入以上式子得 $bc=4$，结合 $b^2+c^2=8$；

解得 $b=c=2$。

该方法通过向量合成将几何关系代数化，体现了跨知识整合与模型转化的创造性思维。

2.4 构建新三角形模型，创造性把各参量与已知量纳入其中

构建新三角形模型时，将原三角形 ABC 的中线 AD 及边长 b、c 整合到新三角形 ABF 中。由平行四边形构造可知 AF=2AD=2，且 ΔABF 与 ΔABC 面积相等，均为$\sqrt{3}$。由 ΔABF 中应用余弦定理得

$4=b^2+c^2+2bc\cdot cos\angle ABF$

结合已知 $b^2+c^2=8$，面积公式：$\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\cdot sin\angle ABF$；联立以上各式得：$\angle ABF=\frac{\pi}{3}$，$bc=4$；

再解关于 b、c 方程组得：$b=c=2$。

该方法通过构造新图形整合已知条件，体现了数形结合与模型创新的思维能力。

3 对比数学模型，培养创造性收敛思维

在多种数学模型对比分析中，学生能更深刻地理解知识间的联系，培养创造性收敛思维，并学会识别最优解法，提升解题效率与思维深度。下面将对前文建立的几种模型进行比较探究。

3.1 探究直角三角形模型与向量合成模型的关系

直角三角形模型：

$c^2=(ADsin\alpha)^2+(\frac{a}{2}+ADcos\alpha)^2$，$b^2=(ADsin\alpha)^2+(\frac{a}{2}-ADcos\alpha)^2$；

联立以上两式可得：$2b^2+b^2\cdot a^2=4AD^2$

向量合成模型：$|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|^2=4|\overrightarrow{AD}|^2$，展开有：$b^2+c^2+2bc\cdot cos\angle BAC=4AD^2$；

余弦定理有：$a^2=b^2+c^2\cdot 2bc\cdot cos\angle BAC$

以上两式联立得：$2b^2+c^2\cdot a^2=4AD^2$

这样可以看出直角三角形模型与向量合成模型实质上等价的，在数学上把以上结论称之为三角形中线定理，其公式为：$AD^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$。

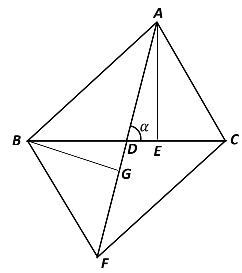
学生通过推导发现直角三角形模型与向量合成模型实质上等价，得出三角形中线定理。这一过程使学生深入理解不同模型的内在联系，体会到从多元角度出发可达到同一数学结论，有助于打破知识间的壁垒，构建完整的知识体系。推导中综合运用勾股定理、向量运算和余弦定理等知识，有效锻炼了学生的逻辑推理能力，使其学会梳理复杂关系中的清晰脉络，提升了思维的严谨性。

3.2 探究向量合成模型与新三角形余弦定理模型的关系

向量合成模型：$b^2+c^2+2bc\cdot cos\angle BAC=4AD^2$

新三角形余弦定理模型：$4AD^2=b^2+c^2+2bc\cdot cos\angle ABF$

其中$\angle BAC+\angle ABF=\pi$，$cos\angle BAC=-cos\angle ABF$



可以得出以上两个模型表达式是等价的，说明平行四边形 ABFC 向量合成式所对应的就是三角形 ΔABF 中的余弦定理式。

学生发现向量合成模型与余弦定理模型表达式等价，由此认识到两者在几何本质上的统一性。这有助于他们把握不同数学形式间的内在联系，形成透过现象看本质的思维习惯。同时，这一理解也提升了学生在几何情境中灵活迁移与综合运用向量、余弦定理等知识的能力，增强了解决问题的效率与思维灵活性。

3.3 探究角度合成模型结论式的几何含义

从 B 点向 AF 边作垂线 BG，三角形 ΔABF 面积可表示为$S=\frac{1}{2}\cdot 2AD\cdot BG$，则$BG=\frac{S}{AD}$。由勾股定理可得：

$$\sqrt{c^2-BG^2}+\sqrt{b^2-BG^2}=2AD$$

代入 BG 可得：

$$\sqrt{c^2-\left(\frac{S}{AD}\right)^2}+\sqrt{b^2-\left(\frac{S}{AD}\right)^2}=2AD$$

同理，根据三角形 ΔABC 可得：

$$\sqrt{c^2-AE^2}+\sqrt{b^2-AE^2}=BC。$$

从几何角度解释角度合成模型的结论式，有助于学生将代数表达式与线段长度、面积等几何量相联系，从而理解数学知识的本质。这一过程不仅强化了数形结合的思想，也培养了学生多维度分析问题的能力。通过挖掘模型背后的几何意义，学生能够更深入地理解数学模型，拓展思维深度，提升整体数学思维品质。

 ISSN：2705-0904(Print)；2705-0874(Online)

4 拓展数学模型，培养创造性应用思维

4.1 模型整合拓展

在上述对各模型的探究过程中，通过整合向量合成式与余弦定理式，成功推出三角形中线定理，其公式为：$AD^2=\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$。结合 $AD=1$，$b^2+c^2=8$，能够迅速解得 $a=2\sqrt{3}$。

进一步深入研究发现，将中线、面积、角度等分散条件整合，可以导出更具一般性的表达式：$\sqrt{c^2-\left(\frac{S}{AD}\right)^2}+\sqrt{b^2-\left(\frac{S}{AD}\right)^2}=2AD$。该表达式对应的是两直角三角形 ΔABG 与 ΔBGF 的勾股定理式之和，它揭示了三角形中线、面各以及边长之间紧密的内在联系。将 $S=\sqrt{3}$，AD=1 代入可得：$\sqrt{c^2-3}+\sqrt{b^2-3}=2$。这一结果不仅验证了表达式的正确性，还为解决类似问题提供了简洁有效的方法。

以上整合拓展的过程，能够引导学生从整体上把握数学知识，发现不同条件之间的潜在联系，培养学生归纳总结和抽象概括的能力，让学生学会从特殊问题中提炼一般规律，提高学生解决综合性数学问题的能力。

4.2 学科变式拓展

问题：将条件改为 $b+c=4$，其他条件不变。请至少用两种方法求解边长 b、c。

解法 1：在三角形 ΔABF 中，利用余弦定理建立关系式为：

$4=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\angle ABF$；又 $b+c=4$；

面积公式：$\sqrt{3}=\frac{1}{2}bc\cdot sin\angle ABF$;

联立以上各式得：

$$bc\cdot sin\frac{\angle ABF}{2}cos\frac{\angle ABF}{2}=\sqrt{3}，bc\cdot cos\frac{\angle ABF}{2}cos\frac{\angle ABF}{2}=3$$

两式作比得：$tan\frac{\angle ABF}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle ABF=\frac{\pi}{3}$;

将角度值代入上式得：$bc=4$

再解关于 b、c 方程组得：$b=c=2$。

解法 2：根据两直角三角形与的勾股定理式之和有：$\sqrt{c^2-\left(\frac{S}{AD}\right)^2}+\sqrt{b^2-\left(\frac{S}{AD}\right)^2}=2AD$，代入得 $\sqrt{c^2-3}+\sqrt{b^2-3}=2$，又 $b+c=4$。通过解方程组或基本不等式，可解得 $b=c=2$。

两种解法共同体现了学生在面对学科变式问题时，能够打破固有思维定式，从多角度分析问题，灵活选择和运用不同的数学知识与方法，实现知识的迁移和融合。

4.3 跨越学科拓展

引导学生思考向量合成在物理学（力的平衡）中的应用，拓展数学模型的实际意义。

例题：在一个力的合成与分解情境中，已知两个共点力 $\overrightarrow{F_1}$ 和 $\overrightarrow{F_2}$ 的合力大小为 $\overrightarrow{F_合}$。已知 $\overrightarrow{F_合}$ 的大小为 2，$\overrightarrow{F_1}$ 与 $\overrightarrow{F_2}$ 作用在同一点 A。已知以 $\overrightarrow{F_1}$ 和 $\overrightarrow{F_2}$ 为邻边构成的平行四边形的面积为 $2\sqrt{3}$，点 D 是 $\overrightarrow{F_合}$ 上的中点，且 AD=1。若 $\overrightarrow{F_1}$ 与 $\overrightarrow{F_2}$ 的大小之和为 4，求 $\overrightarrow{F_1}$ 与 $\overrightarrow{F_2}$ 的夹角。

解析：将力的问题转化为数学中的解三角形问题，利用前面构建的数学模型进行求解。根据平行四边形模型有，$|\overrightarrow{F_1}|^2+|\overrightarrow{F_2}|^2+2|\overrightarrow{F_1}|\cdot|\overrightarrow{F_2}|\cdot cos\theta=4|\overrightarrow{AD}|^2=4$（θ 为 $\overrightarrow{F_1}$ 与 $\overrightarrow{F_2}$ 的夹角），又因为 $|F_1|\cdot|F_2|$ $(|\overrightarrow{F_1}|+|\overrightarrow{F_2}|)^2=16$，即 $|\overrightarrow{F_1}|^2+|\overrightarrow{F_2}|^2+2|\overrightarrow{F_1}|\cdot|\overrightarrow{F_2}|=16$；再由平行四边形面积公式 $S=|\overrightarrow{F_1}|\cdot|\overrightarrow{F_2}|\cdot sin\theta=\sqrt{3}$。联立以上三式可得：$tan\frac{\theta}{2}=\sqrt{3}$，得 $\theta=\frac{2\pi}{3}$。

通过跨学科拓展，学生认识到数学知识在物理学等领域的实际应用，有助于打破学科界限，增强学科融合意识。在此过程中，学生不仅加深了对数学模型的理解与应用，也提升了将数学知识迁移至现实情境的能力，从而培养了运用数学思维解决实际问题的综合素养。

5 结语

在本次教学实践中，通过对问题的多维探究与变式拓展，取得了良好成效。学生不仅掌握了运用中线定理、向量合成等工具构建几何模型的方法，也通过对比代数、几何等不同解法，体会到数学工具的互补性与数学的逻辑美、统一美。跨学科案例进一步提升了学生的 STEM 融合意识与综合应用能力。后续教学可继续鼓励创新思维，设计更多跨学科情境问题，助力学生在真实场景中灵活运用数学，提升综合素养。

参考文献：

[1] 章建跃. 核心素养导向的高中数学课程改革与教材建设[J]. 数学教育学报，2021, 30(1): 1-6.

[2] 王尚志，胡凤娟. 基于高考评价体系的数学科考试内容改革实施路径[J]. 中国考试，2022, (9): 10-18.

[3] 教育部考试院. 高考数学全国卷试题分析与教学建议（2020—2023）[M]. 北京：高等教育出版社，2023.

作者简介：梁燕（1977.06-），女，汉族，陕西西安人，本科，中学高级教师，研究方向：从事中学数学教育研究。