

“特征值与特征向量”双轨融合教学改革与实践研究

姜洪领 王利娟^{*} 任爱红

宝鸡文理学院 数学与信息学院, 中国·陕西 宝鸡 721013

摘要: 随着新工科建设的深入推进和高等教育内涵式发展, 高等代数课程的教学改革日益迫切。特征值与特征向量作为线性代数的核心概念, 其教学长期以来存在“重计算轻理解”“重形式轻实质”的困境, 在有限课时约束下尤为突出。本文构建并实践了一套“几何直观导入—计算技能训练—概念网络构建—项目应用整合”的双轨融合教学模式。该模式以现代信息技术为支撑, 以导学案为教学设计载体, 以分组协作探究为组织形式, 实现了抽象代数概念与几何直观认知的深度融合、理论知识学习与实际问题解决的有机统一。教学实践表明, 该模式能够有效突破传统教学的局限, 在有限时间内显著提升学生对概念本质的理解深度、数学计算能力和应用迁移素养, 为高等代数课程的矩阵特征值理论的高效教学提供了可操作、可推广的解决方案。

关键词: 高等代数; 特征值与特征向量; 计算思维; MATLAB 可视化; 项目驱动; 教学改革

Research on the Reform and Practice of a Dual-Track Integrated Teaching Model for "Eigenvalues and Eigenvectors"

Jiang Hongling, Wang Lijuan^{*}, Ren Aihong

College of Mathematics and Information Science, Baoji University of Arts and Sciences, China Shaanxi Baoji 721013

Abstract: With the deepening of new engineering education construction and the connotative development of higher education, teaching reform in the Advanced Algebra course has become increasingly urgent. As core concepts of linear algebra, the teaching of eigenvalues and eigenvectors has long been trapped in the dilemma of "emphasizing computation over understanding" and "prioritizing form over substance," a problem particularly pronounced under the constraints of limited class hours. This paper constructs and implements a dual-track integrated teaching model characterized by "geometric intuition introduction – computational skill training – conceptual network construction – project application integration." Supported by modern information technology, with guided learning plans as the instructional design vehicle and group collaborative inquiry as the organizational form, this model achieves a deep integration of abstract algebraic concepts with geometric intuitive cognition, as well as an organic unity of theoretical knowledge learning and practical problem-solving. Teaching practice demonstrates that this model can effectively break through the limitations of traditional instruction, significantly enhancing students' depth of understanding of conceptual essence, mathematical computation skills, and application transfer competence within a limited timeframe. It provides an operable and scalable solution for the efficient teaching of matrix eigenvalue theory in the Advanced Algebra course.

Keywords: Advanced algebra; Eigenvalues and eigenvectors; Computational thinking; MATLAB visualisation; Project-based; Teaching reform

0 引言

高等代数是理工科专业重要的基础课程之一, 其核心概念与思想方法是后续专业课程学习和科学研究的重要工具。随着新工科建设的推进和“双一流”建设的深入, 社会对人才的知识结构、能力素养和创新思维提出了更高要求。《中国高考评价体系》^[1]提出的“一核四层四翼”理念, 强调从“知识立意”转向“能力立意”“素养立意”, 这为高等教育教学改革指明了方向。数学教育不仅要传

授知识, 更要培养学生运用数学思维分析和解决问题的能力, 提升学生的数学核心素养。高等代数教学^[2]亟需突破传统“填鸭式”“计算式”教学模式, 向“启发式”“探究式”“应用式”转型。

“特征值与特征向量”是高等代数^[3]课程的关键节点和教学难点。其重要性体现在: 一是理论上的枢纽地位, 连接了行列式、矩阵、线性方程组、二次型、相似对角化等核心内容; 二是应用上的广泛性, 是微分方程、数值分

析、优化理论、量子力学、计算机图形学、数据科学等诸多领域的基础工具。然而,传统教学普遍存在抽象与割裂、重“算”轻“思”以及教学手段单一等问题。

针对上述困境,本研究旨在探索并实践一种适用于有限课时的高效教学模式。本研究的主要目标是:在四课时内,不仅使学生掌握特征值与特征向量的基本计算方法,更要帮助他们深刻理解其几何本质,建立概念之间的网络化联系,并初步具备将其应用于简单实际问题的能力。

1 理论基础与设计理念

1.1 理论基础

本教学模式建立在坚实的教育理论基础之上。建构主义学习理论^[4]认为学习是学习者主动建构内部心理表征的过程,强调情境、协作、会话和意义建构。本模式通过创设可视化情境、组织小组协作探究,引导学生主动发现特征值的几何原型,自主建构概念网络。认知负荷理论指出工作记忆容量有限,教学应优化信息呈现方式以降低外在认知负荷,增加相关认知负荷。本模式利用动态可视化将抽象的代数关系转化为直观的几何图像,有效降低了学生的认知门槛。APOS 理论^[5]适用于数学概念学习,包括活动、过程、对象、图式四个阶段,本模式的教学设计暗合这一理论发展路径。成果导向教育理念强调以学生的学习成果为目标反向设计教学过程,本模式以“学生能理解几何本质、会计算、能简单应用”为核心成果目标,反向设计四阶段的教学活动和评价方式。

1.2 核心理念:双轨融合与项目驱动

“几何直观”与“代数计算”双轨融合是本模式的核心理念。几何轨以“方向不变”和“伸缩比例”这一鲜明的几何事实作为认知起点和意义锚点,所有代数定义、性质和计算都力求与几何图像建立联系,使抽象的符号具有可理解的视觉对应物。代数轨则在几何直观的引导下,系统训练从特征多项式求解到特征向量计算的标准代数方法,保证学生具备扎实的计算基本功。两条轨道并非简单并列,而是相互交织、相互印证,例如在计算后要求学生解释结果的几何意义,在观察几何现象后引导学生用代数语言进行描述和证明。

“项目驱动”的知识整合与应用迁移是本模式的另一特色。本知识点共设 4 个课时,在第四课时引入一个精简的、真实背景的项目,将本模块所学知识置于一个完整的、有意义的任务情境中。项目实践促使学生综合运用几何理解、计算技能和软件工具,实现知识的整合、固化与迁移,体验数学的实用性,提升数学建模意识和解决复杂问题的

能力。

2 四课时双轨融合教学模式整体设计

2.1 总体框架与阶段目标

总体教学框架体现了螺旋上升的设计思想,形成了从直观感知到技能训练,再到概念整合,最后到应用迁移的完整闭环。第一阶段“几何直观导入”以几何为主导,通过动态可视化让学生“看见”概念,形成第一印象,为代数定义提供直观背景。第二阶段“计算技能训练”以代数轨为主导,系统训练标准计算方法,形成基本技能,同时利用 MATLAB 减轻机械计算负担,将注意力更多集中于方法和原理,几何轨则辅助解释计算结果。第三阶段“概念网络构建”实现双轨深度融合,从几何动画揭示相似对角化的本质,从代数变形打通概念联系,实现从“形”到“理”的飞跃。第四阶段“项目应用整合”以应用驱动实现双轨汇合,项目任务要求学生既理解几何意义又执行代数计算,并解释结果,实现学以致用。

2.2 关键教学策略

导学案^[6]设计策略确保每课时配发一份精心设计的导学案,包含学习目标、课前预习思考、课堂探究任务、难点点拨、课后巩固与拓展等模块。任务设计体现梯度化,包括基础性、提高性和挑战性任务,适应不同层次学生需求。导学案成为连接课前、课中、课后,引导学生自主学习和小组探究的“路线图”。

小组协作与赋分激励策略采用异质分组,每组 4-5 人,设组长。课堂采用多种互动与赋分方式,包括个人自由分、个人定向分、团体定向分和团体自由分,激发竞争与合作意识。赋分不仅评价结果,更关注过程参与、思维贡献和团队合作。

信息技术深度融合策略要求教师准备高质量的动态演示脚本用于课堂直观展示,同时为学生提供简明的操作指南和预写好的基础代码框架,降低技术门槛。建议在机房授课或要求学生自带安装好相关软件的设备,边学边练。

3 四课时详细教学设计、实施与资源

3.1 第一课时:几何直观导入——让概念“看得见”

本课时教学目标是观察建立特征值与特征向量的几何原型,并激发学习兴趣。教学重点在于归纳几何原型,难点是从具体的视觉现象抽象出一般的数学描述。

教学过程从情境创设开始,教师展示一幅图片经过不同矩阵变换后的效果,并提出引导性问题:“矩阵就像一台‘变换机器’,什么样的向量经过这台机器后,方向不会改

变?”这一生活化、可视化的情境能迅速聚焦核心问题,激发学生的好奇心。

接下来的动态演示与观察环节是整个课时的核心。教师使用 MATLAB 展示三类典型变换:首先是伸缩变换,运行代码展示单位圆和随机向量在特定矩阵作用下的变换,引导学生关注坐标轴方向向量的变化;接着是旋转变换,展示旋转矩阵的变换,通过“有方向不变的向量吗?”这一问题引出实数域无解的认知冲突;最后是剪切变换,引导学生发现只有特定方向向量保持不变。学生以小组为单位,在学案上记录观察结果。

在归纳猜想与分享环节,教师组织小组讨论,提炼观察到的共同规律,并邀请小组代表分享他们的“发现”。教师将学生的关键描述如“方向不变的非零向量”“长度缩放的比例”板书出来。这一过程将“发现权”部分交给学生,培养他们的归纳概括和表达能力。

最后的形式化定义与小结环节,教师肯定学生的发现,顺势给出标准数学语言定义,并布置课后思考题。这一环节实现从直观到抽象的平稳过渡,让定义“水到渠成”。

3.2 第二课时:计算技能训练——从“看见”到“算出”

本课时旨在掌握特征多项式法求解特征值和特征向量的方法。教学重点是特征多项式法的计算步骤,难点在于求解特征向量时齐次线性方程组基础解系的求取以及重特征值情形下的处理。

教学过程从复习与衔接开始,通过提问回顾上节课的几何原型和定义,针对课后思考题进行辨析,强调特征向量必须是非零向量,然后自然引出本节课的计算主题。

方法讲解与示范环节,教师从定义出发推导特征方程,以具体矩阵为例详细板书求解过程,包括写出特征方程、解方程得特征值、代入求解特征向量等步骤。同时现场演示用 MATLAB 验证结果,增加可信度和现代感。

学案分层练习环节,学生以小组为单位,完成包含三个层次练习题的学案:基础层针对 2×2 矩阵(相异实根),提高层针对 3×3 矩阵或含重根、零根的 2×2 矩阵,拓展层则要求使用 MATLAB 计算并对比手算结果。教师巡视指导,对表现突出的小组给予赋分激励。

最后的疑难总结与点评环节,教师集中讲解练习中出现的共性错误,总结计算流程,并布置课后作业。及时反馈与纠错能防止错误固化,帮助学生记忆核心步骤。

3.3 第三课时:概念网络构建——从“散点”到“网络”

本课时目标是深理解特征值与相关概念的联系。教学重点是特征值与零空间的关系以及相似对角化的几何解释,难点是理解特征值是使矩阵降秩的特殊值以及高维空间相似对角化的几何想象。

深化几何意义环节,教师通过动画演示展示特征向量作为变换“主轴”的角色,以及相似对角化的动态过程。这一过程将上节课的静态观察升维为动态理解,揭示相似对角化这一核心结论的直观意义。

探究概念联系环节,教师引导学生关注方程 $(\lambda I - A)x = 0$,通过一系列问题链引导思考:

这个方程的解集是什么?

特征向量在解集中处于什么地位?

什么时候解集会有非零向量?

矩阵奇异的代数判断是什么?

师生共同绘制概念关系图,厘清特征值、特征向量、零空间、秩、行列式之间的逻辑链条。

巩固与辨析环节,学生小组讨论学案中的概念辨析题,如“若 λ 是 A 的特征值,则 $(\lambda I - A)$ 的秩一定小于 n 吗?”“一个可逆矩阵的特征值可以为零吗?”等。教师随机抽取小组进行回答并赋分。

总结与升华环节,教师用精炼的语言概括本课的核心洞见,提升思维层次,并预告下节课的项目任务。

3.4 第四课时:项目应用整合——从“知识”到“智慧”

本课时旨在将特征值分解应用于实际问题。教学重点是 PCA 项目中协方差矩阵的特征分解及其几何解释,难点是从实际问题中抽象出矩阵,理解特征值和特征向量在具体情境下的意义。

项目导入与任务发布环节,教师展示一张二维数据散点图,提出问题:“如何用数学方法找出这个椭圆的主轴方向?”引出主成分分析思想,并指出这组新基正是数据协方差矩阵的特征向量。

小组项目实践环节,学生按照学案上的步骤完成任务:计算给定数据的协方差矩阵,求其特征值和特征向量,将特征值从大到小排序,绘制特征向量方向等。教师巡视指导,对进展顺利的小组给予激励。

成果展示与评价环节,随机抽取小组进行成果展示,其他小组和教师进行提问和点评。多元评价方式包括师评、互评和自评。

课程总结与拓展环节,教师总结四课时的学习旅程,简要列举特征值在其他领域的应用,鼓励学生课后探索,并布置最终课程反思报告。

4 评价实施效果

我们在本科生一年级第一学期选进行教学实践(以下简称实验组)。采用本文设计的四课时双轨融合教学模式,对照本科生二年级学生采用传统讲授模式(以下简称对照组)。教学结束后通过问卷调查收集数据。

表1 学生学习体验问卷调查结果(部分)

调查项目	实验组一年级 平均分(1-5分)	对照组二年级 平均分(1-5分)
对几何意义的理解程度	4.42	3.19
学习内容的有趣和有用性	4.56	3.65

结果显示,实验组与对照组总体在知识难点掌握上无显著差异,说明新模式在保证计算技能训练效果上相同于传统模式。在反映概念本质理解的几何理解与概念辨析题上,实验组显著高于对照班,优势幅度达到1.23分。在考察知识迁移能力的综合应用题上,实验班同样表现显著更优,优势幅度为0.91分。

进一步调查显示,实验组学生对特征值几何意义的理解程度、学习兴趣和有用性感均显著高于对照组。实验组学生普遍认为小组合作学习和MATLAB等工具的使用对学习有帮助。在教学检查座谈会上的学生反馈也印证了量化结果。实验组学生表示:“以前觉得特征值就是个算出来的数,现在看到动画,才知道它代表了变换的‘拉伸力’。”“小组一起做项目虽然也有争论,但最后把图画出来、讲明白的时候特别有成就感。”而对照组学生则反映:“老师讲得很细,题也练了很多,但考到那个‘为什么特征向量是零空间的基础’我还是有点懵,感觉知识点是散的。”

5 讨论、反思

5.1 教学模式的优势与价值

双轨融合教学模式^[1]具有多方面的优势与价值。首先,它体现了高效性与针对性,针对“课时少、内容难”的矛盾,四阶段设计目标明确、节奏紧凑,最大化利用了课堂时间,实现了短课时下的深度教学。其次,它符合认知规律,“直观-计算-理解-应用”的路径符合人类从感性到理性、从具体到抽象、从知识到能力的认知发展规律。再次,它促进素养全面发展,不仅关注基础知识和基本技能,更通过几何直观、项目探究、协作学习等环节,有效培养了学生的直观想象、逻辑推理、数学建模、合作

交流等核心素养。最后,它提升了学习动力,可视化、项目化、游戏化的元素使原本抽象枯燥的代数学习变得生动、有趣、有用,有效激发了学生的内在学习动机。

5.2 实施过程中的挑战与对策

实施过程中也面临一些挑战。学生信息技术水平参差不齐可能影响课堂进度和体验,对策包括开设前置导论课、提供详细教程和安排同伴支持。小组合作中的“搭便车”现象需要更精细的角色分工和评价方式来解决。教学进度把控难度增加要求教师精心设计环节时间并严格把控。对教师能力的更高要求则需要加强教师培训与教研活动,积累和共享优质教学资源。

6 结语

面对高等代数教学中“特征值与特征向量”模块的抽象性与课时有限性的双重挑战,本研究构建并实践了一套以“双轨融合”与“项目驱动”为核心的四课时高效教学模式。实证研究结果表明,该模式能够在与传统教学相同甚至更短的课时内,实现更优的教学效果:学生在保持扎实计算技能的同时,对概念本质的理解深度、知识体系的建构能力以及解决实际问题的应用素养均得到显著提升。

本研究的价值不仅在于提供了一个经过验证有效的具体教学案例,更在于展示了一种应对抽象数学内容短课时教学的系统设计方法论:即通过技术赋能可视化、活动促进探究化、评价转向过程化,实现知识、能力与素养的协同发展。这为当前正在进行的高等代数乃至其他数学基础课程的教学改革,提供了一条具有较强操作性和推广价值的实践路径。

参考文献:

- [1] 教育部考试中心. 中国高考评价体系[M]. 北京:人民教育出版社, 2019.
- [2] 王玉行. 高等代数教学对学生形成和发展数学品质的意义及教学策略[J]. 数学教育学报, 2007, 16(3):3.
- [3] 王萼芳, 石生明, 修订. 北京大学数学系前代数小组. 高等代数(第五版)[M]. 北京:高等教育出版社, 2019.
- [4] 王沛, 康廷虎. 建构主义学习理论述评[J]. 教师教育研究, 2004, 16(5):5.
- [5] 唐艳. 基于APOS理论的数学概念教学设计[J]. 上海中学数学, 2005(12):3.
- [6] 刘旭相. 导学案设计的基本原则与策略[J]. 教育科学论坛, 2012(08):24-25.
- [7] 刘志健, 李娜, 周春美等. “双轨, 双控”模式创

新高校课程体系改革[J].中国成人教育,2015(10):3.

基金项目:宝鸡文理学院本科教学改革研究一般项目:《高等代数》课程体系整体优化与教学内容改革的研究与实践(NO.25JGYB15);宝鸡文理学院本科教学改革研究重点项目:师范认证持续改进视域下分类推进数学师范

专业的课程思政建设研究,(NO.25JGZD09)。

作者简介:姜洪领(1978-),男,副教授,博士,研究方向:偏微分方程计算与可视化、数学教育。

*通讯作者:王利娟(1982-),女,副教授,博士,研究方向:偏微分方程理论与应用、数学教育。