关于导数极限定理的推广及应用

吴瑞华 吕川

中国石油大学(华东)理学院，中国·山东 青岛 266580

摘要：本文研究了导数极限定理在多元函数中的推广，并给出了二元函数可微性的弱充分条件。

关键词：导数；二元函数；可微性

On the Generalization and Application of the Derivative Limit Theorem

Wu Ruihua, Lv Chuan

College of Science, China University of Petroleum (East China) , China Shandong Qingdao 266580

Abstract: This paper studies the generalization of the derivative limit theorem in multivariable functions, and presents a weak sufficient condition for the differentiability of binary functions.

Keywords: Derivative; Binary function; Differentiability

0 引言

在一元函数微分学中，导数极限定理是沟通导数极限与导数值的重要桥梁。很多文献，如[1-3]，探讨了导数极限定理的应用和推广。本文首先给出了导数极限定理在多元函数中的推广形式，然后以二元函数为例，给出并证明了函数可微性的几个弱充分条件。

1 导数极限定理

定理 1 设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域 $f(x_0)$ 连续，在去心邻域 $U^0(x_0)$ 可导，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$ 存在，则 f(x) 在 x_0 可导，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)=f'(x_0)$。

证明：对任意 $x\in U^o(x_0)$，由拉格朗日中值定理，存在 ξ 介于 x 和 x_0 之间，使得：$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(\xi)$。

当 $x\to x_0$ 时，$\xi\to x_0$，所以

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{\xi\to x_0}f'(\xi)=\lim_{x\to x_0}f'(x)$$

若将定理中的邻域限制为左邻域或右邻域，则可以得到左、右导数的极限定理[3]。

2 偏导数情形的推广

对多元函数 $f(x_1,x_2,...,x_n)$，固定某个变量 x_k，将其他变量视为常数，则关于 x_k 的偏导数本质上是一元函数的导数。因此，可直接得到：

命题 1 设 $f(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 在点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的邻域内连续，对某个变量 x_k 的偏导数在 P_0 的去心邻域内存在。若 $\lim\limits_{P\to P_0}\frac{\partial f(P)}{\partial x_k}=A$，则 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial x_k}$ 存在且等于 A。

特别地，对二元函数，将 $P\to P_0$ 的条件变为单变量极限 $x_k\to x_k^0$，可得：

命题 2 设 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内连续，f_x 在 (x_0,y_0) 的去心邻域内存在。若 $\lim\limits_{x\to x_0}f_x(x,y_0)=A$，则 $f_x(x_0,y_0)$ 存在且等于 A。

3 方向导数情形的推广

方向导数[4] 描述了多元函数沿确定方向上的变化率。假设 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 及过该点的超射线：$x_1=x_1^0+l_1t,x_2=x_2^0+l_2t,\cdots,x_n=x_n^0+l_nt$ $(t\geq 0,l_1^2+l_2^2+\cdots+l_n^2=1)$ 上有定义，若极限

$$\lim_{t\to 0+}\frac{f(x_1^0+l_1t,\cdots,x_n^0+l_nt)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{t} \tag{1}$$

存在，则称之为函数在 R^n 空间中沿 $\vec{l}=(l_1,\cdots,l_n)$ 方向上的方向导数，记为 $\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}$。

当函数的各个偏导数都存在时，方向导数可以用偏导数计算。根据命题 1 有：

命题 3 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的邻域内连续，对每个变量 x_k 的偏导数在 P_0 的去心邻域内存在。且 $\lim\limits_{P\to P_0}\frac{\partial f(P)}{\partial x_k}=A_k\ (k=1,\cdots,n)$，则 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}}$ 存在且等于 $A_1l_1+\cdots+A_nl_n$.

注意到（1）式为单变量 t 的极限，定义沿 $\vec{l}$ 直线方向的全导数 $(-\infty<t<+\infty)$

$$\frac{df}{dt}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1^0+l_1t,\cdots,x_n^0+l_nt)-f(x_1^0,\cdots,x_n^0)}{t} \quad (2)$$

则可视为一元函数的导数，此时命题 3 可条件可削弱，得到：

命题 4 若 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在点 $P_0(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 的邻域内连续，射线 $\vec{l}$ 上每点沿 $\vec{l}$ 方向上的全导数 $\frac{df}{dt}$ 都存在。且 $\lim\limits_{t\to 0+}\frac{df(P)}{dt}=A$，则 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}}$ 存在且等于 A。

类似地，可以讨论沿固定曲线方向逼近点 P_0 时的情形，得到相应的全导数极限定理 .

4 二元函数的可微性

多元函数可导未必可微分和连续，这是多元函数与一元函数的根本差别之一。因此将导数的极限定理推广到微分时，为保证微分的存在性，可以偏导数连续条件[5] 出发来进行分析。

定理 2 若函数 $f(x,y)$ 的偏导数 f_x 和 f_y 在点 (x_0,y_0) 连续，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。

证明：函数增量

$$\begin{aligned}\Delta f&=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\\&=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)]\end{aligned}$$

第一项应用拉格朗日中值定理，得：

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)=f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)\Delta x\ (0<\theta_1<1) \quad (3)$$

根据偏导数 f_x 的连续性：

$$f_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)=f_x(x_0,y_0)+\alpha_1(\Delta x,\Delta y),$$

其中 $\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\to 0$（当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时）。

第二项应用拉格朗日中值定理，得：

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)\Delta y\ (0<\theta_2<1) \quad (4)$$

根据偏导数 f_y 的连续性：

$$f_y(x_0,y_0+\theta_2\Delta y)=f_y(x_0,y_0)+\alpha_2(\Delta y),$$

其中 $\alpha_2(\Delta y)\to 0$ 当 $\Delta y\to 0$ 时)。

代入得

$$\Delta f=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\alpha_2(\Delta y)\Delta y$$

且当 $\rho\to 0$ 时 $\frac{\alpha_1(\Delta x,\Delta y)\Delta x+\alpha_2(\Delta y)\Delta y}{\rho}\to 0$。故 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。

利用命题 1，可将定理 2 中偏导数连续的条件弱化。

命题 5 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，偏导数 f_x 和 f_y 在点 (x_0,y_0) 的去心邻域内存在，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_x(x,y)$ 和 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_y(x,y)$ 都存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。

证明：注意到 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_x(x,y)$ 和 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_y(x,y)$ 存在可得到 $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 存在且等于极限，即得到两个偏导数连续。

在式（4）中，若 $f_y(x_0,y_0)$ 存在，根据一元函数的微分，则可直接得到

$$f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha_2(\Delta y)\Delta y$$

于是可得到下面的弱充分条件：

定理 3 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，偏导数 f_x 在点 (x_0,y_0) 的去心邻域内存在，极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_x(x,y)$ 存在，且另一偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。

注意到在定理 3 中，用到了点 (x_0,y_0) 处另一个偏导数的存在性，可以考虑是否有完全摒弃 (x_0,y_0) 处可导性的条件。根据定理 1，若极限 $\lim\limits_{y\to y_0}f_y(x_0,y)$ 存在，则 $f_y(x_0,y_0)$ 存在且等于该极限。于是可得：

推论 1 若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，偏导数 f_x 和 f_y 在点 (x_0,y_0) 的去心邻域内都存在，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_x(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0}f_y(x_0,y)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。

推论 2 若函数 $f(x,y)$ 点 (x_0,y_0) 的某邻域内连续，在点 (x_0,y_0) 的去心邻域内可微，且 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f_x(x,y)$ 和 $\lim\limits_{y\to y_0}f_y(x_0,y)$ 存在，则 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。

5 结语

本文通过将一元函数导数极限定理推广至多元函数，得到了偏导数、方向导数及全导数的极限定理，并以二元函数为例，建立了可微性的弱充分条件。这些结果弱化了传统可微性判定中对偏导数连续性的严格要求，为多元函数微分学的理论研究提供了新视角，同时也为实际问题中函数可微性的判定提供了更灵活的工具。后续可进一步探讨定理在高维函数及非光滑函数中的适用性。

参考文献：

[1] 段成均. 关于导数极限定理的几个应用及其推广[J].

高等数学研究，2021,24(3):27-29.

[2] 吴艳. 导函数极限定理的应用及推广[J]. 高等数学研究，2018,21(5):36-38.

[3] 刘秀梅. 关于导数极限定理的一个注记[J]. 河北北方学院学报，2006,22(3):11-12.

[4] 李振宇等. 多元函数微分学的几个基本问题[J]. 工科数学，1993,S2:1-13.

[5] 华东师范大学数学科学学院. 数学分析（上册）[M]. 第五版. 北京：高等教育出版社，2019.

基金项目：项目资助 高等学校大学数学教学研究与发展中心项目 (CMC20240644) 资助成果。

作者简介：吴瑞华（1981-），女，汉族，山东临沂人，博士研究生，副教授，研究方向：微分方程。