

# 高等代数中矩阵的特征值与特征向量的课程思政教学研究

刘文娟 张佳凡

渭南师范学院 数学与统计学院, 中国·陕西 渭南 714099

**摘要:** 在新时代背景下, 高校教育将立德树人作为根本任务, 课程思政的推进则有效打通了专业课程与思政教育之间的壁垒, 形成了协同育人的良好格局。高等代数这门课程概念抽象、逻辑严谨、理论性较强, 当前国内高校数学类课程思政存在思政元素与专业知识点的结合不够自然, 对抽象知识点的思政挖掘不够深入等问题。本文以高等代数中“矩阵的特征值与特征向量”为例, 充分挖掘其中的思政内涵, 从教学设计、课堂实施、教学效果等方面展开研究。通过总结教学实践中的经验与不足, 本文给出了相应的优化思路, 旨在为高等代数及同类数学课程的思政建设提供可参考的教学模式, 最终达到传授知识、锻炼能力与引导价值三者的高度融合。

**关键词:** 高等代数; 课程思政; 特征值; 特征向量

## Research on curriculum ideological and political education in the teaching of eigenvalues and eigenvectors of matrices in advanced algebra

Liu Wenjuan, Zhang Jiafan

School of Mathematics and Statistics, Weinan Normal University, China Shaanxi Weinan 714099

**Abstract:** In the new era, fostering virtue through education serves as the fundamental task of university education. The advancement of curriculum-based ideological and political education effectively breaks down the barriers between professional courses and ideological and political education, fostering a sound pattern of collaborative education. As a course featuring abstract concepts, rigorous logic and strong theoretical nature, Advanced Algebra faces prominent problems in the practice of curriculum-based ideological and political education across domestic universities: the integration of ideological and political elements with professional knowledge points is unnatural, and the exploration of ideological and political connotations behind abstract knowledge remains superficial. Taking Eigenvalues and Eigenvectors of Matrices in Advanced Algebra as the research subject, this paper fully explores its inherent ideological and political connotations and conducts research from the aspects of teaching design, classroom implementation and teaching effect. By summarizing the experience and deficiencies in teaching practice, this paper proposes corresponding optimization ideas. It aims to provide a referable teaching model for the ideological and political construction of Advanced Algebra and similar mathematics courses, and ultimately realize the high integration of knowledge imparting, ability cultivation and value guidance.

**Keywords:** Advanced algebra; Ideological and political education; Eigenvalue; Eigenvector

## 0 引言

坚持立德树人这一根本任务, 不仅是建成教育强国的重要根基, 更是新时代高校开展人才培养的首要方向。习近平总书记在全国教育大会<sup>[1]</sup>和全国两会<sup>[2]</sup>等重要会议上多次指出, 立德树人应贯穿教育教学的各个环节, 促进思政课程与课程思政同向同行, 不断提升思想政治教育的整体质量, 真正做到以价值塑造为引领、以知识传授为基础、以能力培养为支撑的三位一体育人格局。

高等代数<sup>[3]</sup>作为数学专业的基础课程, 其内容涵盖多项式、矩阵、向量空间、线性变换、线性方程组以及特征值与特征向量等知识模块。它既是现代数学与众多理工学科的基础, 还能培养学生的逻辑推理能力、运用数学知识解决实际问题的能力、抽象思维能力等。然而实际教学中, 仍存在一些困难。其一, 高等代数知识理论性强、概念抽象, 学生常感学习枯燥, 难以形成直观认知; 其二, 高等代数对思维能力和逻辑推理能力要求高, 而学生数学基础

与个人能力差异较大,不少学生容易产生畏难情绪。

立足上述教学背景,推进高等代数课程思政相关研究与实践<sup>[4-6]</sup>,既有利于引导学生理解课程中的抽象概念,提升教学质量,也是高校落实立德树人根本任务的重要举措,对于培养专业功底扎实、信念坚定、具备责任担当的新时代大学生具有重要意义。不过,现有研究与实际教学情况也反映出<sup>[7-8]</sup>高等代数课程思政在实施过程中存在明显短板。比如,部分教学设计中思政元素与专业内容结合方式较为表面,未能充分挖掘抽象知识承载的育人功能,整体融入思路也不够系统。针对这些现实问题,为促进思政教育与专业教学深度结合,本文以“矩阵的特征值与特征向量”为载体,结合具体课堂设计,分析课程思政与专业知识有效融合的实现路径与具体实施办法。

## 1 矩阵的特征值与特征向量课程思政教学设计

### 1.1 教学内容

本次课堂围绕“矩阵的特征值与特征向量”展开,该内容源自北京大学数学系所编的第五版《高等代数》,位于教材第七章线性变换的第四节。本节课涵盖两大知识板块,一是特征值与特征向量的定义及相关要点,二是上述内容的具体计算方法。

### 1.2 学情分析

在学习本节内容之前,学生已具备行列式、矩阵运算以及齐次线性方程组的求解等知识。但面对偏抽象的理论内容,学生仍需要循序渐进的引导才能顺利理解。此外,学生的学习能力存在一定差距,大部分人理解抽象定义时存在困难,常需要借助实例辅助学习。学生对数学理论在实际生活中的应用抱有较高热情,也具备一定的自主探究意愿。但高等代数整体难度较大,使得部分学生在学习过程中容易滋生畏惧心理,学习状态也随之变得消极。

### 1.3 教学目标

知识目标:使学生准确理解矩阵的特征值与特征向量的定义,尤其要明确“非零向量”等关键条件;能够正确阐述特征方程与特征多项式的概念,并掌握矩阵的特征值与特征向量的计算方法。

能力目标:借助从实际问题抽象出特征值与特征向量概念的教学环节,培养学生观察和分析问题的能力;通过小组合作探究相关性质,有效提升逻辑推理与沟通协作能力。

素养目标:引导学生充分认识数学知识的应用意义,增强数学学习的主动性,养成用数学思维解决问题的习惯;在协作学习中培育团队意识,强化科技强国的使命感与责任感。

## 1.4 教学重难点

教学重点:矩阵的特征值与特征向量的定义及注解。

教学难点:求解矩阵的特征值与特征向量的方法。

## 1.5 教学过程

本节课以塔科马大桥倒塌实例导入,通过数学建模引出特征值与特征向量;随后讲解特征值与特征向量的定义、相关注解、引导学生推导求解方法并通过例题讲解使学生熟悉方法,设置不同水平的练习题;最后引导学生归纳总结并回归工程问题,完成“实践-理论-实践”的闭环教学。

## 2 矩阵的特征值与特征向量课程思政教学实施

### 2.1 问题导课

(1)播放美国塔科马大桥倒塌视频并提问学生大桥为什么会发生倒塌?

(2)若将桥梁视为弹簧-质量系统,忽略阻尼和外力通过数学建模,得到桥梁的振动方程为:

$$M\ddot{x} + Kx = 0 \quad (1)$$

其中  $M$  为刚度矩阵,  $K$  为质量矩阵,  $M$  与  $K$  均为实对称矩阵,  $x$  为桥梁的位移向量。令  $x = e^{i\omega t}\phi$ , 其中  $\phi$  为非零向量。则(1)可转化为

$$K\phi = \lambda M\phi \quad (2)$$

(2)称为特征值方程。

提问:特征值方程(2)与大桥倒塌有什么关系?与今天要学习的矩阵的特征值和特征向量有什么关系?

(3)(思政融入)运用数学建模的方法,把工程中的现实问题转化为可求解的数学问题。该过程遵循了“从实践到理论再到实践”的认知规律。培养学生“用理论指导实践、在实践中检验理论”的辩证思维,克服“纸上谈兵”的不足,树立“知行合一”的学习观。

(思政融入)结合塔科马大桥倒塌的惨痛教训,引导学生认识到严谨治学、精准计算的重要性。工程领域的微小误差,可能引发灾难性后果,培养学生“严谨务实、责任担当”的职业素养和敬畏之心,树立“细节决定成败”的做事理念。

### 2.2 新知构建

(1)讲解矩阵的特征值与特征向量的定义,通过例题展示如何判断特征向量。

定义1 设  $A$  是  $n$  阶方阵,  $\xi$  为  $n$  维非零列向量,如果存在数  $\lambda$  满足:

$$A\xi = \lambda\xi \quad (3)$$

则称  $\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值,  $\xi$  是矩阵  $A$  的属于特征值

$\lambda$  的特征向量。

例 1 设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\xi_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ ,

试确定  $\xi_1, \xi_2$  是否为  $A$  的特征向量。

(2) 引导学生将其转化已熟知的内容并归纳求解特征值与特征向量的一般步骤。

由 (3)  $A\xi = \lambda\xi$  ( $\xi \neq 0$ ) 可得

$$(\lambda E - A)\xi = 0 \quad (\xi \neq 0) \quad (5)$$

$\lambda$  是矩阵  $A$  的特征值  $\Rightarrow$  (5) 有非零解  $\Rightarrow |\lambda E - A| = 0$

$|\lambda E - A| = 0$  称为  $A$  的特征方程,  $|\lambda E - A|$  称为  $A$  的特征多项式。

由上述过程可得求解矩阵特征值与特征向量的一般步骤:

第一步 通过  $|\lambda E - A| = 0$ , 求出矩阵  $A$  的所有特征值  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots \lambda_k$ .

第二步 对每一个特征值, 求出齐次线性方程组

$$(\lambda_i E - A)x = 0 \quad (i = 1, 2, 3 \dots k) \text{ 的基础解系}$$

(3) (思政融入) 在讲授定义时, 通过演示法规范板书定义, 结合范例法展示判断特征向量的例题, 让学生明白, 数学知识的准确性关乎后续推导和应用, 培养学生对待知识“一丝不苟、精益求精”的工匠精神。

(思政融入) 强调特征值与特征向量定义的严谨性和逻辑性, 引导学生认识到“真理源于严谨推导、科学始于求真务实”, 培养学生尊重科学、追求真理的科学素养, 摒弃浮躁功利的学习心态。

### 2.3 典型例题

(1) 给出例题: 求二阶方阵的特征值和特征向量。

例 2 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值和特征向量。

解: 第一步  $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 1 \\ 1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4)$

由  $|\lambda E - A| = 0$  可得  $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 4$ .

第二步 当  $\lambda_1 = 2$  时, 解线性方程组  $(2E - A)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-3 & 1 & 0 \\ 1 & 2-3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

令  $x_2 = k_1$ , 则对应  $\lambda_1$  的特征向量为  $k_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \neq 0)$ ,

当  $\lambda_2 = 4$  时, 解线性方程组  $(4E - A)x = 0$

$$\begin{pmatrix} 4-3 & 1 & 0 \\ 1 & 4-3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_2 = x_2 \end{cases}$$

令  $x_2 = k_2$ , 则对应  $\lambda_2$  的特征向量为  $k_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} (k_2 \neq 0)$ .

(2) 给出一个求解三阶方阵特征值与特征向量的练习题, 引导学生思考几何重数与基础解系中解向量的个数之间的关系。给出一个求解三阶方阵特征值与特征向量的课

后作业, 并与练习题做对比。

练习 1 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$  的特征值和特征向量。

课后作业 求矩阵  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$  的特征值和特征向量。

(3) (思政融入) 从二阶方阵到三阶方阵的跨越, 对学生的逻辑思维和计算能力提出更高要求。通过引导学生思考几何重数与基础解系的关系, 鼓励学生直面复杂问题, 克服畏难情绪。鼓励学生面对困难时, 不应轻易退缩, 培养“迎难而上、坚韧不拔”的意志品质。

(思政融入) 通过课后作业与练习题的对比, 引导学生学会“归纳总结、举一反三”, 深刻体会“解题不只是解一个题, 是掌握一类题的底层逻辑和规律”的核心要义, 让学生明白“举一反三、融会贯通”是高效学习的关键, 树立“终身学习、持续进步”的学习理念。

### 2.4 课堂小结

(1) 引导学生梳理总结本节知识; 利用新知解答大桥倒塌原因。

$$\text{由} \quad K\phi = \lambda M\phi \quad (2)$$

$\lambda$  决定了系统的固有频率  $\omega = \sqrt{\lambda}$ , 当外界激励频率接近固有频率时, 会引发共振, 继而引起倒塌。

(2) (思政融入) 拓展矩阵的特征值与特征向量的实际应用(如人工智能、量子力学、信号处理等领域), 让学生认识到数学知识的广泛价值, 激发学生学习数学的兴趣和动力, 引导学生树立“学以致用、服务社会”的价值导向。

(思政融入) 通过教学引导学生领悟“数学脱胎于生活、又反哺于生活”的本质特征, 培养其运用数学思维和方法应对现实问题的素养, 使学生树立起理论与实践相统一的辩证唯物主义立场, 激发其强烈的社会责任感与历史使命感。

### 3 高等代数融入课程思政教学效果与反思

本次课程充分挖掘矩阵的特征值与特征向量知识点中的思政元素, 遵循“以学生为中心、教师为主导”的教学理念, 结合工程案例驱动与问题导向教学原则, 展开“问题导入 - 新知构建 - 范例演练 - 应用拓展 - 总结升华”五个教学环节, 实现了专业教学与思政育人的有机融合, 取得良好课堂教学成效。

课堂教学开始时, 利用塔科马大桥发生坍塌的真实工程事件作为引入, 以此吸引学生的学习兴趣。结合学生此前已经学过的行列式、线性方程组等相关内容, 激活他们

已有的知识储备,再顺理成章地引出特征值与特征向量这一重点内容。在正式授课环节,教师通过讲解、示范以及小组讨论等多种形式,指导学生完成严谨的公式推导与准确计算。之后利用二阶、三阶方阵的典型例题和分层练习,帮助学生熟练掌握计算方法,进一步提高逻辑思维能力。课程最后重新回到工程共振相关问题,说明数学知识在实际生活中的应用价值,完成“实践-理论-实践”的完整学习过程。通过这样的学习安排,学生可以牢固掌握特征值与特征向量的定义和计算步骤,抽象理解能力与数学建模能力也会得到明显提升。与此同时,学生能够切身感受理论联系实际、求真务实、严谨认真的科学精神,在严谨治学、责任担当以及科技强国意识等方面获得正向引导。

在今后的教学过程中,教师会依据学生的接受程度和课堂真实反馈,持续改进思政内容的融入方式,增加工程、科技、人工智能等领域的实际应用案例,同时提供更多跨学科阅读材料和探究任务,让课程思政更加贴合学生的学习需求,实现更自然、更深入的育人效果。

#### 参考文献:

[1] 习近平.在全国教育大会上强调:紧紧围绕立德树人根本任务朝着建成教育强国战略目标扎实迈进[N].人民日报,2024-09-11(001).

[2] 习近平.看望参加全国政协十四届三次会议的民盟民进教育界委员并参加联组会时强调坚持立德树人培养

担当民族复兴重任的时代新人[N].人民日报,2025-03-08(001).

[3] 王萼芳,石生明.高等代数[M].北京:高等教育出版社,2019.

[4] 张俊忠,韦维.基于课程思政的高等代数教学研究[J].西南师范大学学报(自然科学版),2022,47(10):117-124.

[5] 成乐,刘迪,王慧.大学数学课程思政策略与实践-以高等代数为例[J].现代职业教育,2022(15):37-39.

[6] 张广亮,逢淑梅.基于混合式教学的高等代数课程思政建设研究[J].广东技术师范大学学报,2023,44(2):106-112.

[7] 李桂贞,李羽,莫秋慧.高等代数课程思政“五维六融”教学模式研究与实践[J].惠州学院学报,2022,42(6):123-128.

[8] 苏华东,欧玉芹.课程思政视域下数学专业高等代数课程的教学设计[J].南宁师范大学学报(自然科学版),2022,39(4):128-133.

基金项目:渭南师范学院教育教学改革研究项目(JG2025103),渭南师范学院青年人才支持计划(2025XJ-QNRC-02)。

作者简介:刘文娟(1995-),女,汉族,陕西黄陵,博士,讲师,研究方向:偏微分方程。