

向量模的有关问题的解法探究

高斌

南京外国语学校仙林分校, 中国·江苏 南京 210023

摘要: 向量问题既是重点难点也是考点热点, 命题灵活性较强, 这也要求解题思路要开阔, 解题方法较多, 没有快狠准的妙法, 也没有一招制胜的通法, 本质离不开灵活运用代数、几何、向量性质来解题。

关键词: 向量的模; 代数法; 几何法

Exploration of Solutions to Problems Concerning Vector Moduli

Gao Bin

Xianlin Campus of Nanjing Foreign Language School, China Jiangsu Nanjing 210023

Abstract: Vector-related problems constitute key and difficult points as well as frequently-examined hot topics. Due to the high flexibility of proposition design, broad thinking is required for problem-solving. Multiple approaches are available; there exists no universally applicable shortcut or one-size-fits-all solution. Fundamentally, solving such problems relies on the flexible application of algebraic methods, geometric methods and vector properties.

Keywords: Vector modulus; Algebraic method; Geometric method

0 引言

几何与代数是高中数学课程的主线之一, 向量是其主要内容之一。在必修课程与选择性课程中, 突出几何直观与代数运算之间的融合, 即通过形与数的结合, 感悟数学知识之间的关联, 加强对数学整体性的理解。

1 具体内容

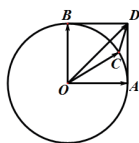
向量自身就是一种好的数学方法, 向量的数量积运算更是几何问题代数化的重要途径, 向量的模的大小和最值是常考的基本问题, 重点考查数形结合思想和数学运算能力。故在常规解法基础上, 对一类与向量模有关问题的解法进行探究, 有助于开阔思路和提升思维能力。

若 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 均为单位向量, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) \leq 0$, 则 $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}|$ 的值可能是 (AB)

A. $\sqrt{2} - 1$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

解析: 法一: $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}^2 = \vec{c}^2 - \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \leq 0$, 则 $\vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \geq 1$, $\therefore |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})^2} = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2 - 2(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} + \vec{c}^2} = \sqrt{3 - 2(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}} \leq \sqrt{3 - 2 \times 1} = 1$

思路探析: 向量模的求解, 根据其模长公式, 容易联想到将其平方尝试求解。



法二: 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是垂直的单位向量, 以 O 为圆心作单位圆,

作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, 则 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{CA} \cdot \vec{CB} \leq 0$,

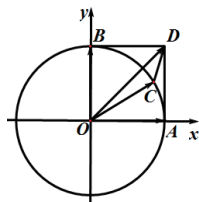
所以 C 点轨迹在 $\overline{AB}$ 上 (含 A, B 两点), 从而 $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = |\vec{OD} - \vec{OC}| = |\vec{CD}|$,

由图知 $\sqrt{2} - 1 \leq |\vec{CD}| \leq 1$, 当 C 点与 OD 共线、与 A, B 点重合时取等号。

思路探析: 根据条件作图, 判断 C 点轨迹, 数形结合, 小题小做, 能够直观快速地解题。

法三: 设 $\vec{c}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 θ , $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$, $|\vec{c}| = 1$, 在法一法二的基础上, 由数量积公式得 $1 \leq \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) \leq \sqrt{2}$, 也能得到精确的取值范围。

或者得到 $\cos \theta \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$, 则 $\theta \in [0, \frac{\pi}{4}]$, 也能得到 C 点轨迹, 再运用不等式 $||\vec{m}| - |\vec{n}|| \leq |\vec{m} \pm \vec{n}| \leq |\vec{m}| + |\vec{n}|$ 得到 $\sqrt{2} - 1 \leq |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| \leq |\vec{AD}| = |\vec{BA}| = 1$.



法四: 建立直角坐标系, 有 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, $\vec{c} = (x, y)$, $(x, y \in [0, 1], x^2 + y^2 = 1)$ 或写成三角

形式 $\vec{c} = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

则 $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = (1-x, 1-y)$ 或 $(1-\cos\varphi, 1-\sin\varphi)$,

由模长公式得 $|\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{3-2(x+y)}$ 结合基本不

$$\text{等式 } \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \leq \frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

$$\text{或 } |\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}| = \sqrt{3-2(\sin\varphi+\cos\varphi)} = \sqrt{3-2\sqrt{2}\sin(\varphi+\frac{\pi}{4})}$$

结合 φ 及三角函数范围求解。

思路探析: 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是垂直的单位向量, 容易联想到建立坐标系, 判断 $\vec{c}$ 的位置, 坐标法求解。

变式 1. 若 $\vec{a}, \vec{b}$ 均为单位向量, 且 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, 若向量 $\vec{c}$ 满足 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, 则 $|\vec{c}|$ 的最大值是 (C)

- A.1 B.2 C. $\sqrt{2}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

解析: 法一: $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}^2 = \vec{c}^2 - \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 0$,

令 $\vec{c}$ 与 $\vec{a} + \vec{b}$ 的夹角为 θ , $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{2}$, 则 $|\vec{c}|^2 - \sqrt{2}|\vec{c}|\cos\theta = 0$, 所以 $|\vec{c}| = \sqrt{2}\cos\theta \leq \sqrt{2}$,

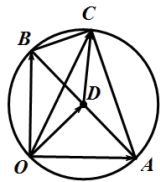
当 $\theta=0$ 时取等号。

思路探析: 对已知条件进行代数化简, 结合数量积公式和夹角的范围, 得到理想的主元等量关系, 进而容易求解。

法二: $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}^2 = 0$, $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{2}$,

则 $\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{c}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{c}|^2 \leq 0 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{c}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{c}|^2$, 解左边关于 $|\vec{c}|$ 的一元二次不等式得到, $\frac{|\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{a} - \vec{b}|}{2} \leq |\vec{c}| \leq \frac{|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|}{2} = \sqrt{2}$ 。

思路探析: 由条件得到所求量的二次不等式, 代数求解, 再结合向量的位置关系解题。



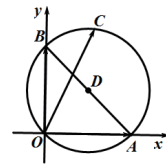
法三: 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是垂直的单位向量, 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$,

由 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ 得 $\vec{CB} \perp \vec{CA}$, 则 C 点在以 AB 为直径的圆 D 上,

所以 $|\vec{c}| = |\vec{OC}| = |\vec{OD} + \vec{DC}| \leq |\vec{OD}| + |\vec{DC}| = 2r = \sqrt{2}$,

当 O, D, C 三点共线时取等号。

思路探析: 根据已知条件, 得 $\vec{OA} \perp \vec{OB}$, $\vec{CB} \perp \vec{CA}$ 联想到圆的几何性质, 作以 AB 为直径的圆, 数形结合快速求解。由此图也可知法一中 $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 。



法四: 建立直角坐标系, 有 $\vec{a} = (1, 0)$, $\vec{b} = (0, 1)$, $\vec{c} = (x, y)$,

由 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ 得 $x^2 - x + y^2 - y = 0$, 即 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2}$,

则 C 点在以 AB 为直径的圆 D 上, 从而 $|\vec{c}| = |\vec{OC}| \leq 2r = \sqrt{2}$ 。

或化简得 $x^2 + y^2 = x + y$, 结合基本不等式 $\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$ 求解 $|\vec{c}| = \sqrt{x^2+y^2}$ 的最大值。

思路探析: 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 是垂直的单位向量, 容易联想到建立坐标系, 判断点 C 的位置, 快速解得 $|\vec{c}|$ 的最大值即是直径。

变式 2. 若向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} \neq \vec{b}$, $\vec{c} \neq 0$ 且 $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, 则 $\frac{|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{c}|}$ 的最小值为 2。

解析: 法一: $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{c} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}^2 = 0$,

从而有 $\vec{a} \cdot \vec{b} - |\vec{c}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{c}|^2 \leq 0 \leq \vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{c}| \cdot |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{c}|^2$, 解左边关于 $|\vec{c}|$ 一元二次不等式得到 $\frac{|\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{a} - \vec{b}|}{2} \leq |\vec{c}| \leq \frac{|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|}{2}$, 所以 $\frac{|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{c}|} \geq 2$ 。

思路探析: 本题向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的位置关系不确定, 经过代数化简得到于 $|\vec{c}|$ 的一元二次不等式, 解不等式得到答案。

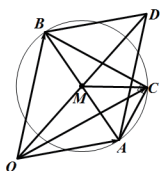
法二: 设 $\vec{c} - \vec{a} = \vec{m}$, $\vec{c} - \vec{b} = \vec{n}$, 有 $\vec{m} \cdot \vec{n} = 0$, 则 $\vec{m} \perp \vec{n}$. 所以 $\vec{a} = \vec{c} - \vec{m}$, $\vec{b} = \vec{c} - \vec{n}$ 。

以 $\vec{m}, \vec{n}$ 所在有向线段为邻边作矩形, 则对角线长度相等, 即 $|\vec{m} + \vec{n}| = |\vec{m} - \vec{n}|$ 。

结合不等式 $||\vec{m}| - |\vec{n}|| \leq |\vec{m} \pm \vec{n}| \leq |\vec{m}| + |\vec{n}|$, 所以 $\frac{|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{c}|} = \frac{|2\vec{c} - (\vec{m} + \vec{n})| + |\vec{m} - \vec{n}|}{|\vec{c}|} = \frac{|2\vec{c} - (\vec{m} + \vec{n})| + |\vec{m} + \vec{n}|}{|\vec{c}|} \geq \frac{2|\vec{c}|}{|\vec{c}|} = 2$ 。

思路探析: 多变量问题, 通过换元化繁为简, 体现整

体思想, 结合三角不等式向量形式, 达到消元的目的, 得到答案。



法三: 作 $\vec{OA} = \vec{a}$, $\vec{OB} = \vec{b}$, $\vec{OC} = \vec{c}$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{OD}|$, $|\vec{a} - \vec{b}| = |\vec{BA}|$

$\therefore (\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$, 即 $\vec{CA} \perp \vec{CB}$,

$\therefore C$ 点在以 AB 为直径的圆 M 上, 如图所示,

$$\therefore \frac{|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{a} - \vec{b}|}{|\vec{c}|} = \frac{|\vec{OD}| + |\vec{BA}|}{|\vec{c}|} = \frac{|\vec{OM}| + |\vec{CM}|}{|\vec{c}|} = \frac{2(|\vec{OM}| + |\vec{CM}|)}{|\vec{c}|} \geq \frac{2|\vec{OC}|}{|\vec{c}|} = 2,$$

当 O, M, C 三点共线时取等号。

思路探析: 根据条件知 $\vec{CA} \perp \vec{CB}$ 恒成立, 确定 C 点的轨迹是以 AB 为直径的圆, 结合平行四边形对角线互相平分和半径不变 (或直角三角形斜边中线是斜边的一半) 的性质求解, 体现了数形结合的思想。

向量理论具有深刻的数学内涵、丰富的物理背景。向量既是代数研究对象, 也是几何研究对象, 是沟通几何与代数的桥梁。本文以向量模为切入点, 对向量模的有关问题的解法进行探析。

(1) 公式法: 直接利用公式 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$, $(\vec{a} \pm \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 \pm 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$, $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ 及其变形和转化求解;

$$\text{极化恒等式: } \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{4} [(\vec{a} + \vec{b})^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2]$$

极化恒等式在有些问题中能够简化计算过程, 其还有平行四边形和三角形两种形式:

平行四边形形式: 在 $\square ABCD$ 中, O 是对角线的交点, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \frac{1}{4} [AC^2 - BD^2]$;

三角形形式: 在 $\triangle ABC$, D 是 BC 的中点, 则 $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AD^2 - BD^2$;

向量三角不等式: $||\vec{m}| - |\vec{n}|| \leq |\vec{m} \pm \vec{n}| \leq |\vec{m}| + |\vec{n}|$.

(2) 坐标法: 根据题意建立合适的坐标系, 写出相应的坐标有助于快速求解;

(3) 几何法: 分析向量的模表示的几何意义, 结合图形的几何性质进行求解;

(4) 代数法: 根据向量的模结构, 构造某个变量的不等式、方程或函数, 进行求解;

常规解法有直接利用数量积公式、模长公式、平方转化公式求解, 有的问题还可以利用三角不等式的向量形式和极化恒等式快速求解, 具有较强的几何特征可以作图利用几何性质求解, 如果能建立坐标系可用坐标法求解, 若能构造三角形形式将双变量转化为单变量会更高效。在解决一些较复杂的条件或者问题时, 还可以进行代数化简, 转化成熟悉的代数问题, 或者结合几何性质作图, 转化为常规几何问题进行求解。体现了转化化归、数形结合、方程与函数的数学思想, 有助于逻辑推理、直观想象和数学运算核心素养的提升。

参考文献:

- [1] 苏教版高中数学教材编写组. 普通高中教科书数学必修第二册[M]. 江苏凤凰教育出版社, 2024:21-24.
- [2] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准[M]. 人民教育出版社, 2020:12-20.
- [3] 罗礼明. 平面向量模的最值问题的多种解法[J]. 高中生, 2016(12):26-27.

作者简介: 高斌 (1990.03-), 男, 汉族, 安徽省东至县, 理学硕士, 中学一级教师, 研究方向: 高中数学教学。