

从模量与变差看连续函数的精细化谱系——Lipschitz、Hölder与绝对连续的再认识

张辉

上海应用技术大学 理学院, 中国·上海 201418

摘要: 连续、一致连续、Lipschitz 连续、Hölder 连续与绝对连续是数学分析中五类重要的连续性概念。已有文献通过集合包含关系给出了它们之间的 Venn 图。本文引入“模量控制”与“变差控制”两个分析维度, 重新解读这一谱系的内在逻辑。我们指出: Lipschitz 连续是两类控制的共同强化; 狭义 Hölder 连续 ($\alpha < 1$) 与绝对连续分别代表两条不同的强化路径, 二者互不蕴含。本文还系统总结了各类连续性的判定方法与反例构造。这一双维度分析框架揭示了各类连续性之间的内在刻画机理, 为实分析的学习与研究提供了理论参照。

关键词: Lipschitz 连续; Hölder 连续; 绝对连续; 模量控制; 变差控制

From Modulus and Variation to the Refinement Hierarchy of Continuous Functions A Reexamination of Lipschitz, Hölder, and Absolute Continuity

Zhang Hui

School of Science, Shanghai Institute of Technology, China Shanghai 201418

Abstract: Continuous, uniformly continuous, Lipschitz continuous, Hölder continuous, and absolutely continuous are five important continuity concepts in mathematical analysis. Existing literature has presented Venn diagrams among them through set inclusion relationships. This paper introduces two analytical dimensions—"modulus control" and "variation control"—to reinterpret the intrinsic logic of this hierarchy. We point out that Lipschitz continuity is the common reinforcement of both types of control; while narrow Hölder continuity ($\alpha < 1$) and absolute continuity represent two distinct reinforcement paths that are mutually exclusive. The paper also systematically summarizes the determination methods and counterexample constructions for each type of continuity. This dual-dimensional analytical framework reveals the intrinsic characterization mechanisms among various continuity types, providing a theoretical reference for the study and research of real analysis.

Keywords: Lipschitz continuity; Hölder continuity; Absolute continuity; Modulus control; Variation control

0 引言

连续性是数学分析的核心概念之一。自 Bolzano (1817) 和 Cauchy (1823) 给出严格的 $\varepsilon - \delta$ 定义以来, 数学家们出于不同的研究需要, 逐步引入了多种更强的连续性概念。其中, 一致连续、Lipschitz 连续、Hölder 连续与绝对连续是应用最为广泛的五类连续函数, 在实分析、泛函分析、偏微分方程及动力系统中扮演着不可或缺的角色。

江添辉和王维克^[1]系统分析了五类连续函数之间的包含关系, 给出了清晰的 Venn 图。其主要结论可概括为: $L \subseteq A \subseteq U \subseteq C$, 且 H 与 A 、 H 与 L 均无包含关系, 但 $H \subseteq U$ (这里 C 、 U 、 L 、 H 、 A 分别为连续函数类、一致连续函数类、Lipschitz 连续函数类、Hölder 连续函数类、绝对

连续函数类)。该文为初学者厘清这一谱系提供了有价值的参考。

然而, 从深入理解的角度, 仍有若干问题值得进一步探讨。第一, 上述包含关系的成立往往依赖于定义域为有限闭区间的隐含假定, 区间类型的影响未充分展开。第二, Hölder 连续中指数 α 的取值 (是否包含 $\alpha=1$) 直接决定了其与 Lipschitz 连续的关系, 这一边界情形需要明确处理。第三, 已有分析偏重于“哪些包含成立”的外延描述, 而未从“函数性质由何种量控制”这一内在机制出发解释谱系形成的原因。

本文尝试从一个新的角度重新审视这一谱系。我们将连续性的强化分为两个基本维度:

模量控制: 刻画函数在局部范围内抖动幅度随自变量

距离衰减的速度。Lipschitz 连续要求线性衰减, Hölder 连续要求幂次衰减(指数 <1), 一致连续仅要求衰减发生而不规定速度。

变差控制: 刻画函数在有限个区间上累积变化量的整体可和性。绝对连续要求对任意有限个互不相交的区间, 只要总长度充分小, 函数值变化的总和就充分小。

在这一框架下, Lipschitz 连续恰好是两类控制的共同强化, 而 Hölder 连续 ($\alpha < 1$) 与绝对连续则分别代表“纯模量控制”与“纯变差控制”两条不同的强化路径。

本文的结构安排如下: 第 1 节回顾五类连续函数的定义并明确记号; 第 2 节从模量视角分析 Lipschitz 与 Hölder 连续; 第 3 节从变差视角分析绝对连续; 第 4 节讨论 Lipschitz 连续作为两类控制交集的特殊地位; 第 5 节讨论区间类型对蕴含关系的影响; 第 6 节总结全文。

1 定义与记号

本文中, $\mathbb{R}$ 表示实数集, $I \subset \mathbb{R}$ 为区间(可为有界或无界、开或闭), 映射 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在 I 上的函数。

定义 1 (连续) 函数 f 在点 $x_0 \in I$ 处连续, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in I: |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

若 f 在 I 中每一点连续, 则称 f 在 I 上(逐点)连续。

记 $C(I)$ 为连续函数全体。

定义 2 (一致连续) 函数 f 在 I 上一致连续, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in I: |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

记 $U(I)$ 为一致连续函数全体。

定义 3 (Lipschitz 连续) 函数 f 在 I 上 Lipschitz 连续, 若存在常数 $L > 0$, 使得对任意 $x, y \in I$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

满足上述条件的最小的 L 称为 Lipschitz 常数, 记为 $Lip(f)$ 。记 $L(I)$ 为 Lipschitz 连续函数全体。

定义 4 (Hölder 连续) 设 $\alpha \in (0, 1)$, 函数 f 在 I 上 α -Hölder 连续, 统称为 Hölder 连续, 若存在常数 $C > 0$, 使得对任意 $x, y \in I$, 有

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

记 $H(I)$ 为 Hölder 连续函数全体。

这里需要指出的是, 本文采用狭义的 Hölder 连续定义, 即指数 α 严格小于 1。这一约定将 Lipschitz 连续(对应 $\alpha=1$) 排除在 Hölder 连续之外, 使二者成为平行的概念。当需要同时讨论二者时, 我们将 Lipschitz 连续视为 $\alpha=1$ 的临界情形。

定义 5 (绝对连续) 函数 f 在 I 上绝对连续, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \forall \text{互不相交的区间 } (a_i, b_i) \subset$$

$$I, i=1, 2, 3, \dots, n:$$

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta \Rightarrow \sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

记 $A(I)$ 为绝对连续函数全体。

定义 6 (一致连续模量)^[3] 对 $\delta > 0$, 定义 f 在 I 上的一致连续模量为

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)|: x, y \in I, |x - y| < \delta\}.$$

2 从模量视角看: Lipschitz 与 Hölder 连续

一致连续模量 $\omega_f(\delta)$ 刻画了函数在尺度 δ 下的最大波动幅度。不同连续性对应着 $\omega_f(\delta)$ 趋于零的不同速度。

命题 1 设 $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, 则

$$(i) f \text{ Lipschitz 连续} \Leftrightarrow \omega_f(\delta) = O(\delta);$$

$$(ii) f \text{ 为 } \alpha\text{-Hölder 连续} \Leftrightarrow \omega_f(\delta) = O(\delta^\alpha), \text{ 其中 } \alpha \in (0, 1);$$

$$(iii) f \text{ 一致连续} \Leftrightarrow \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \omega_f(\delta) = 0.$$

由此可见, 不同强度的连续性条件, 本质上就是对一致连续模量趋于零的速度给出不同程度的限制: Lipschitz 连续是 Hölder 连续中指数 α 取到临界值 1 时的情形, 因此对函数波动的限制比所有 $\alpha \in (0, 1)$ 的 Hölder 连续都更强, 而 Hölder 连续又进一步强于一致连续——一致连续只要求一致连续模量当 δ 趋于零时趋于零, 对具体的收敛速度不做额外要求, 而逐点连续则在全局范围内无衰减保证, 是这类连续性中要求最弱的条件。

从集合包含关系看, $H \subseteq U \subseteq C$, 但 L 和 H 无包含关系, 如在 $[0, 1]$ 上, $\sqrt{x}$ 是 $\frac{1}{2}$ -Hölder 连续的, 但非 Lipschitz 连续。在 $[0, \infty]$ 上, x 是 Lipschitz 连续的, 但对任何 $\alpha < 1$ 非 α -Hölder 连续。而在模量控制维度上, Lipschitz 连续 ($\alpha=1$) 最强, Hölder 连续 ($\alpha < 1$) 次之, 一致连续更弱, 逐点连续最弱。

3 从变差看: 绝对连续

绝对连续的定义与模量控制有本质不同。它不直接限制单个区间上的波动, 而是限制多个区间上波动之和相对于区间总长度的比值。

命题 2 (Lipschitz 连续蕴含绝对连续) 若 $f \in L(I)$, 则 $f \in A(I)$ 。

证明: 设 f 在 I 上 Lipschitz 连续, 常数 $L > 0$ 。对任意 $\varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$, 对于 I 中任意有限个互不相交的开子区间 (a_i, b_i) , $i=1, 2, 3, \dots, n$, 满足 $\sum_{i=1}^n (b_i - a_i) < \delta$, 则由 f Lipschitz 连续可得

$$\sum_{i=1}^n |f(b_i) - f(a_i)| \leq \sum_{i=1}^n L|b_i - a_i| = \sum_{i=1}^n L(b_i - a_i) < L \cdot \delta = \varepsilon.$$

故而 f 在 I 上绝对连续。

值得注意的是, 该证明不依赖于 I 的有界性, 因此 Lipschitz 连续蕴含绝对连续在任意区间上都成立。

命题 3 (绝对连续蕴含一致连续) 若 $f \in A(I)$, 则 $f \in U(I)$ 。

证明: 在绝对连续的定义中取 $n=1$ 即得一致连续的定义。

绝对连续与一致连续的本质差异在于: 一致连续仅要求单个区间上的波动具有可控性, 而绝对连续则要求任意有限个不相交区间上的波动总和具备可控性。康托函数是“一致连续但不绝对连续”的典型反例。

4 Lipschitz 连续: 两类控制的共同强化

前两节从模量控制和变差控制两个维度分别分析了各类连续性。Lipschitz 连续在这两个维度上都处于最强地位。

定理 1 设 $I \subset \mathbb{R}$ 为任意区间, 则 $L(I) \subseteq A(I)$ 。此外, 若将 Hölder 连续的定义推广至 $\alpha=1$, 则亦有 $L(I) \subseteq \mathcal{H}(I)$, 其中 $\mathcal{H}(I)$ 为广义 Hölder 类 (包含 $\alpha=1$)。换言之, Lipschitz 连续函数既是绝对连续的, 也是广义 Hölder 连续的。

这一结论说明, Lipschitz 连续处于连续性谱系的“顶端”——它同时强化了模量控制和变差控制。而 Hölder 连续 ($\alpha < 1$) 与绝对连续则是两条不同的强化路径, 二者之间没有直接的强弱关系。

定理 2 在本文的狭义 Hölder 连续定义 ($\alpha < 1$) 下, Hölder 连续与绝对连续互不蕴含。具体地:

- (i) 存在 $f \in H(I)$, 但 $f \notin A(I)$;
- (ii) 存在 $g \in A(I)$, 但 $g \notin H(I)$ 。

证明: 对于 (i), 考虑 $f(x) = \begin{cases} x^{\frac{1}{2}} \sin(\frac{1}{x}), & x \in (0, 1] \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 。

该函数 $1/2$ -Hölder 连续, 但在 $[0, 1]$ 上的全变差发散, 故不绝对连续。

对于 (ii), 考虑 $g(x) = x, x \in [0, \infty)$ 。显然该函数 Lipschitz 连续, 由定理 1, 也是绝对连续的。但对任何 $\alpha > 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|g(x) - g(0)|}{|x|^\alpha} = \infty$, 故不是 Hölder 连续。

5 区间类型对蕴含关系的影响

前述讨论中建立的各类连续性之间的蕴含关系, 并非在任意区间上都无条件成立。事实上, 定义域 $I \subset \mathbb{R}$ 的拓扑与度量性质 (如有界性、闭性、紧性) 对这些蕴含关系的有效性具有本质影响。本节以有限闭区间、无界区间和开区间为代表, 系统分析区间类型对前述谱系的影响。

首先考虑有限闭区间 $I=[a, b]$ 。在紧集上, 连续函数必一致连续, 此即 Cantor 定理^[2]。因此在有限闭区间上, 连

续性与一致连续性是等价的: $C([a, b]) = U([a, b])$ 。此时第 3、4 节所建立的包含关系简化为 $L \subsetneq A \subsetneq U = C$, 且 H 与 A 、 H 与 L 均无包含关系, 但 $H \subsetneq U$ 。紧性使得连续性与一致连续性的区分消失, 这是有限闭区间上最显著的特征。

当定义域为无界区间 (如 $I=[0, \infty)$ 或 $I=\mathbb{R}$) 时, 情况发生变化。此时连续不再蕴含一致连续: 经典反例为 $f(x)=x^2$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 但对任意 $\delta > 0$, 一致连续模量 $\omega_f(\delta) = \infty$, 故非一致连续。然而, 一致连续仍然蕴含连续; Lipschitz 连续依然蕴含绝对连续 (该证明不依赖于有界性, 见命题 2); 绝对连续仍蕴含一致连续 (取单区间即得); Hölder 连续也仍蕴含一致连续 (见命题 1)。值得注意的是, 在无界区间上, $f(x)=x$ 是 Lipschitz 连续 (从而绝对连续), 但在狭义 Hölder 定义 ($\alpha < 1$) 下不是 Hölder 连续的。这说明 Lipschitz 连续与 Hölder 连续在无界区间上的区分比在有限区间上更为明显。

对于开区间 (如 $I=(0, 1)$), 连续性与一致连续性的差异同样存在: $f(x)=\sin(1/x)$ 在 $(0, 1)$ 上连续, 但因在 $x \rightarrow 0^+$ 时震荡频率无限增加而非一致连续。此外, 绝对连续在开区间上的定义通常理解为在每个闭子区间上绝对连续 (即局部绝对连续), 因为定义域非紧时, 全局绝对连续的条件更强。一致连续函数虽可延拓至闭包 (若端点极限存在), 但连续函数未必能做到这一点。

综上, 区间类型对蕴含关系的影响可归结为紧性的有无: 在有限闭区间上, 连续与一致连续等价, 谱系结构最为简洁; 在无界区间或开区间上, 这一等价性不再成立, 但其余蕴含关系 (如 Lipschitz 蕴含绝对连续、绝对连续蕴含一致连续等) 保持不变。表 3 汇总了不同区间类型下各类蕴含关系的成立情况。

6 结语

本文从模量控制与变差控制两个独立维度, 系统分析了连续、一致连续、Lipschitz 连续、狭义 Hölder 连续 ($\alpha < 1$) 与绝对连续这五类函数之间的蕴含关系。研究表明: Lipschitz 连续是两类控制的共同强化, 处于谱系顶端; 狭义 Hölder 连续与绝对连续分别代表模量控制与变差控制两条不同的强化路径, 二者互不蕴含但存在非空交集; 区间类型 (有限闭区间、无界区间、开区间) 对蕴含关系具有本质影响, 其中有限闭区间上连续与一致连续等价, 谱系结构最为简洁。这一双维度分析框架不仅明确了各类连续性之间的逻辑依赖关系, 更揭示了其内在的刻画机理, 为实分析与相关领域的学习与研究提供了直观且严谨的理论参照。

参考文献:

[1] 江添辉, 王维克. 浅析几类连续函数的关系[J]. 大学数学, 2025, 41(1): 110-116.

[2] Rudin W. Principles of Mathematical Analysis[M]. 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1976.

[3] Zorich V A. Mathematical Analysis I[M]. 2nd ed. Berlin: Springer-Verlag, 2015.

作者简介: 张辉 (1990.09-), 女, 汉族, 上海, 博士研究生, 讲师, 研究方向: 应用偏微分方程。