生成式人工智能支持的《数学分析》探究式教学设计

张伏

上海理工大学，中国·上海 200093

摘要：生成式人工智能进入大学数学课堂，既带来了新的技术手段，也把一个尖锐的问题摆到台面上：学生的独立思考与严格证明能力会不会因此被削弱。《数学分析》的教学中，直观认识与形式化表达常相脱节，学生看得懂证明却写不出证明。本文以数学证明教学的已有研究与建构性对齐理论为依据，设计了一套以学生独立推理为核心的人机协同探究式教学方案：学生先独立尝试，卡住时获得分层提示，随后自主修正，再由教师评议，最后在无 AI 条件下完成迁移，教师、学生与人工智能各自的职责也在方案中划清。函数极限与一致连续性两个案例，展示了概念辨析、证明构造和反例分析如何组织成教学任务；文中提出的评价方案则从概念理解、证明策略、逻辑严谨性与独立迁移四方面考察学生，可为生成式人工智能与数学分析教学的深度结合提供参考。

关键词：数学分析；生成式人工智能；探究式教学；数学证明；人机协同

Inquiry-Based Instructional Design for Mathematical Analysis Supported by Generative Artificial Intelligence

Zhang Fu

University of Shanghai for Science and Technology, China Shanghai 200093

Abstract: The emergence of generative artificial intelligence (GenAI) has given university mathematics teaching a new technical resource, and has also raised an awkward question: will students' capacity for independent thinking and rigorous proof be weakened as a result? In Mathematical Analysis, intuitive understanding and formal expression are frequently disconnected, and students who can follow a proof often cannot construct one of their own. Drawing on existing research into the teaching and learning of mathematical proof and on constructive alignment theory, this paper designs an inquiry-based instructional scheme in which human and machine collaborate while the student's own reasoning stays central. The scheme follows a five-stage sequence, namely independent attempt, tiered hints, self-revision, teacher review and independent transfer, and sets out what teachers, students and AI are each expected to do. Two cases, the limit of a function and uniform continuity, show how conceptual discrimination, proof construction and counterexample analysis can be organised as classroom tasks. An assessment scheme is also proposed, examining conceptual understanding, proof strategy, logical rigour and independent transfer, as a reference for integrating generative AI more deeply into the teaching of Mathematical Analysis.

Keywords: Mathematical analysis; Generative artificial intelligence; Inquiry-based teaching; Mathematical proof; Human-AI collaboration

0 引言

大学数学课程的教与学，正随着生成式人工智能技术的成熟而发生变化。借助自然语言交互，大语言模型能算数学题、解释抽象概念，还能写出证明，教学因此多了一种可用的技术手段。但机器能证出结论，并不等于学生已经学会证明。基础数学课程改革绕不开的一个问题是：怎样防止学生把 AI 当成答案的来源，而让它真正服务于独立思考。

《数学分析》是数学类专业的核心基础课，以极限理论为根基，概念抽象、逻辑严密，对证明的要求也高。李凤莲、何诣然[1]从入门学习入手，看重数学语言的融合、学习动力的激发与自主能力的养成。对学生来说，记住定义和定理只是第一步，更要紧的是会用定义、会挑证明策略、会把论证写严格。Weber[3]的观察是：即便具备了证明所需的数学知识，学生仍可能因为缺少策略性知识而写不出证明。Ko 等[4]研究连续函数的证明与反例构造，同样暴露出本科生在数学论证上的困难。

生成式人工智能给教学带来了新的可能，但怎么用仍需斟酌。Yoon 等[5]观察本科生怎样借生成式 AI 做数学证明，发现学生怎样理解证明、怎样看待 AI 工具，会直接影响人机互动的走向。本文由此出发，设计一条把学生独立推理放在中心的探究式教学流程，并用两个数学分析案例

说明设计的具体做法。

1 数学分析概念与证明教学的主要困难

1.1 直观认识与形式化表达之间的障碍

极限、连续、一致连续这些概念都有直观背景，可它们的严格定义要靠量词、逻辑关系和精确的数学语言来支撑。学生看着函数图像，能说出“趋近”“连续”是什么意思，定义里的数学条件却往往解释不清。

函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义就是一例。“任意给定 ε”与“存在相应 δ”孰先孰后、后者如何依赖前者，学生常常理不顺。到了一致连续性，δ 的选取还不能依赖具体位置，难度又上一层。可见概念教学若止于直观演示和定义串讲，并不够用，数学语言与形式化表达需要单独训练。这正对应国内有关数学分析入门阶段应加强数学语言训练的主张[1]。

教师演示过的证明，学生大多能看懂；轮到自己动手，选策略、排步骤却未必做得下来。这固然与知识掌握不牢有关，策略性知识的欠缺同样是原因。比如做极限证明，$\varepsilon-\delta$ 定义背得出，δ 该怎么反向确定却没有头绪；判断一致连续性，定义记得住，怎样借量词否定构造反例又不清楚。证明教学因此得同时盯住三件事：结论对不对、策略怎么来、逻辑是否完整[3-4]。

1.2 AI 直接提供证明的教学局限

生成式 AI 几秒钟就能写出一段看上去完整的论证。答案来得太容易，学生容易跳过自己构思的环节，甚至把通顺的表述当成严格证明。AI 辅助教学因此要划清边界：学生还没动手，不宜把完整证明直接摆在面前；卡住了，先给提示；初稿成形之后，再通过错误诊断推动他自己修改。AI 在这里承担的是引导，而不是代替学生思考。

2 人机协同探究式教学模式的构建

2.1 教学设计的基本原则

人机协同的探究式教学，主体是学生，主导在教师，AI 只做辅助。分析问题、选择方法、完成论证，由学生承担；制定目标、设计任务、审核数学内容，由教师负责；概念提示、策略引导、错误诊断，交给 AI。建构性对齐理论（Biggs[6]）强调的是教学目标、学习活动与评价三者之间的对齐，据此，AI 辅助教学的落点不在加快答案生成，而在发展概念理解、证明策略与独立推理。孙菊贺等[2] 在数学分析课程中推行的分层培养，也提示可以按学生的学习基础安排不同层次的任务。

2.2 AI 辅助教学的分层提示机制

要防止 AI 越位，可以设三级提示。第一级只做概念提示，把相关定义、定理和必要条件点出来，唤醒学生已有的知识。第二级是策略提示，学生理解了定义却推不下去时，给出证明方向、关键不等式或辅助变量的线索。第三级为错误诊断，学生写出证明之后，替他检查量词、遗漏的条件和推理中的跳跃，用追问逼他自己改，而不是另写一份正确答案。

介入是逐级加深的：能独立完成，就不给提示；遇到困难，先提示概念，需要时再补策略支持。确有学生怎么也做不出来，教师可以直接讲关键步骤，但讲完要另配一道独立练习，看他离开辅助还能不能把论证写下来。

提示要准，先得分清学生卡在哪里。困难大致有三类：概念没识别、策略选不出、论证写不清。参照他独立尝试的结果，再定介入到哪一级。把“任意”和“存在”弄混的，先让他重述定义；目标清楚却建不起估计的，提示去找一个中间不等式；证明大体写成、只差条件说明的，用追问帮他把漏洞补上。教师还需事先定好提示的上限和退出办法，免得一路提示下去，最后等于把答案交了出去。

2.3 探究式教学的实施流程

由此形成“独立尝试—分层提示—自主修正—教师评议—独立迁移”这样一条流程：教师提出探究任务，学生先独立做；卡住了，AI 按需给提示；学生据此把证明改好；教师组织讨论，审核条件与逻辑；最后换一道结构有变化的新题，在没有 AI 的情况下独立完成。流程看重的，是 AI 介入前后学生自己动了多少脑筋；独立迁移正好用来分辨“得到过帮助”与“真的形成了能力”。

任务可分三层。第一层概念理解，看定义、量词与适用条件掌握得怎样；第二层证明构造，看策略选择与推理是否严谨；第三层综合辨析，借反例或条件的改动考察理解到了什么深度。提示的内容与深浅要跟任务目标对上，不能什么问题都直接给出完整解答。

3 典型教学案例设计

3.1 函数极限：从量词理解到严格证明

从直观认识跨进严格分析，函数极限的 $\varepsilon-\delta$ 定义是一道绕不过去的关口。课上先让学生辨析：平常说的“函数值越来越接近某数”，与严格定义差在哪里，把量词顺序理一遍，再布置证明任务：

$$\lim_{x\to a} x^2 = a^2.$$

由学生独立去找与 ε 对应的 δ。推不下去时，AI 先提示使用恒等式

$$|x^2-a^2| = |x-a||x+a|.$$

仍然定不下 δ，就再提示一步：用 $|x-a|<1$ 把另一

个因子控制住，于是 $|x+a| \leq 2|a|+1$，可取

$$\delta = \min\{1, \varepsilon/(2|a|+1)\}.$$

这样设计的用意，是让学生体会局部限制起了什么作用、δ 又怎样依赖 ε，而不是背下一个标准表达式。证明写完后，再给一份略去局部有界性说明的证明让他挑错，最后换一道新的极限题，检验能否独立迁移。

3.2 一致连续性：从定义辨析到反例构造

一致连续性与普通连续性，分别就在于 δ 能否不依赖具体位置。课上先把两种定义的量词顺序摆在一起比较，再让学生判断 $f(x)=x^2$ 在实数轴上的一致连续性是否成立。

学生独立试过之后，AI 可以提示他从定义的否定形式入手，去找距离趋于零、函数值之差却不趋于零的两列点。若还差一步，再引他向自变量较大的地方想，构造

$$x_n=n, \quad y_n=n+1/n.$$

这时 $|x_n-y_n|=1/n \to 0$，而

$$|f(x_n)-f(y_n)| = 2+1/n^2 \to 2.$$

最后由教师点明：这段数列论证同一致连续性的量词否定如何对应，那个固定的误差下界又起了什么作用；再把函数在整条实数轴与有界闭区间上的一致连续性放在一起比较。反例构造在这里既是理解概念的途径，也是严格论证的训练。

4 教学评价设计与实施边界

评价看的是学生自己掌握了多少数学能力，而不是在 AI 辅助下交出的那份答案。可以从四个维度考察：概念理解，看定义与条件是否掌握；证明策略，看方法怎么选；逻辑严谨性，看论证是否完整；独立迁移，看离开 AI 还能不能解决新问题。

实施时可以留三份材料：首次独立作答、得到提示后的修改稿、最终的独立作答，再从条件使用、推理连贯性与错误修正三方面作比较。评分量规要提前公布，“在提示下完成”与“独立完成”分开记；概念性错误不只扣分，还要记下错在哪一类。这些过程材料，教师用它调整后面的教学，日后做效果研究也是现成的分析依据。

极限案例的题目可以是量词辨析、证明错误诊断和一道新的极限题；一致连续性案例则用定义比较、反例构造，加上量词否定的解释。凡是用过 AI 的题目，都要求学生说明拿到的是哪一级提示、原有思路怎样改的，并在独立任务中表现出真实的掌握程度。评价落在推理依据和关键步骤上，最终答案不是唯一依据。

生成式 AI 会漏条件，也会推理出错，甚至给出并不合适的方法，它给出的东西不能不经审核就当标准答案。提示规则与数学内容须由教师把关，提示的深浅还要随学生基础调整。学习交互记录涉及隐私，向外部模型输入时应去掉不必要的个人信息；AI 给出的诊断，终究只是教师专业判断的参考。

5 结语

生成式 AI 为数学分析教学添了一种新手段，可它的价值不该停在快速生成证明上。概念的形式化理解、独立证明这两处难处，本文以学生独立尝试为起点，以分层提示作支撑，靠自主修正和教师评议兜底；函数极限与一致连续性的两个案例，则说明任务该怎样设计。这样的安排实际上要求 AI 从“答案工具”转为“学习支持工具”，让概念理解、证明策略和独立推理回到课堂的中心。本文属于教学设计研究，效果如何，还要在后续的教学实践中检验。

参考文献：

[1] 李凤莲，何诣然. 数学分析入门学习困境的破解策略与教学实践[J]. 乐山师范学院学报，2026, 41(8): 132-138. DOI:10.16069/j.cnki.51-1610/g4.2026.08.013.

[2] 孙菊贺，王莉.“四位一体，逐层培养”的《数学分析》课程教学改革与实践[J]. 教育进展，2023, 13(1): 197-202. DOI:10.12677/ae.2023.131031.

[3] WEBER K. Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge[J]. Educational Studies in Mathematics, 2001, 48(1): 101-119. DOI:10.1023/A:1015535614355.

[4] KO Y Y, KNUTH E J. Undergraduate mathematics majors' writing performance producing proofs and counterexamples about continuous functions[J]. The Journal of Mathematical Behavior, 2009, 28(1): 68-77. DOI:10.1016/j.jmathb.2009.04.005.

[5] YOON H, HWANG J, LEE K, et al. Students' use of generative artificial intelligence for proving mathematical statements[J]. ZDM - Mathematics Education, 2024, 56: 1531-1551. DOI:10.1007/s11858-024-01629-0.

[6] BIGGS J. Enhancing teaching through constructive alignment[J]. Higher Education, 1996, 32(3): 347-364. DOI:10.1007/BF00138871.

基金项目：本论文受到上海理工大学 2026 年度教师发展研究项目资助。

作者简介：张伏（1982.11-），男，汉族，江苏省睢宁县人，博士学历，副教授，研究方向：随机分析与控制。