ISSN：2705-0904(Print)；2705–0874(Online)

Hopf–Galois 扩张下的 Ding 投射维数的研究

杨淑静
重庆师范大学 数学科学学院，中国・重庆 401331

摘　要：设 H 为半单 Hopf 代数，A 为给定域 k 上的代数，B 为 A 的子代数且 A/B 为 Hopf 代数 H 上的 Hopf-Galois 扩张。论文主要考虑 Hopf-Galois 扩张下的 Ding 投射模及其维数，并将其应用到 Crossed product $A\#_\sigma H$ 与 Twisted smash product $A*H$ 中，可得它们的整体 Ding 投射维数和有限 Ding 投射维数不超过 A 的整体 Ding 投射维数和有限 Ding 投射维数。
关键词：Hopf-Galois 扩张；Ding 投射模；Ding 投射维数；整体 Ding 投射维数；有限 Ding 投射维数

Research on Ding Projective Dimensions of Hopf-Galois Extensions

Shujing Yang
School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing, 401331, China

Abstract: Let H be a semisimple Hopf algebra, A be an algebra over a fixed field k, B be a subalgebra of A and A/B be a Hopf-Galois extension over a Hopf algebra H. This paper mainly considers the Ding projective modules and their dimensions over Hopf-Galois extensions, and then applies them to the Crossed products $A\#_\sigma H$ and Twisted smash products $A*H$, consequently, their global Ding projective dimensions and finitistic Ding projective dimensions are no more than A.
Keywords: Hopf-Galois extension; Ding projective module; global Ding projective dimension; finitistic Ding projective dimension

0 前言

论文总假定 A 为给定的域 k 上的代数，H 为 Hopf 代数，用 $\mathrm{Mod}(A)$ 表示所有左 A - 模构成的范畴，用 $\mathcal{F}(A)$，$\mathcal{P}(A)$ 和 $\mathcal{DP}(A)$ 分别表示 $\mathrm{Mod}(A)$ 所有平坦模，投射模和 Ding 投射模构成的子范畴，用 $\mathrm{add}(\mathcal{A})$ 表示为与范畴 $\mathcal{A}$ 中模的有限和的直和项同构的模构成的子范畴，用 $\mathrm{Dpd}({}_AM)$ 表示左 A - 模 M 的 Ding 投射维数，用 $\mathrm{gl.DPD}(A)$ 与 $\mathrm{FDPD}(A)$ 分别表示代数 A 的整体 Ding 投射维数和有限 Ding 投射维数。

Hopf-Galois 扩张的概念起源于 Chase 等人的文章 [1,2]。1981 年，Kreimer 与 Takeachi[3] 给出了 Hopf-Galois 扩张的一般定义。之后，Hopf-Galois 理论及 Hopf-Galois 扩张的研究受到广泛关注。

1995 年，Enochs 与 Jenda[4] 引入了任意环上 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模的概念。2009 年，Ding, Li 与 Mao[5] 研究了一类特殊的 Gorenstein 投射模和 Gorenstein 内射模，Gillespie[6] 称它们分别为 Ding 投射模和 Ding 内射模。2013 年，Yang, Liu 与 Liang[7] 进一步研究了 Ding 投射模和 Gorenstein 投射模的相似性质。

2013 年，Liu 与 Guo[8] 研究了 Hopf-Galois 扩张下的整体维数和有限维数。2023 年，Guo, Shan[9] 等人研究了 Hopf-Galois 扩张下的 Gorenstein 平坦模。受以上研究启发，论文主要考虑 Hopf-Galois 扩张下的 Ding 投射模及其维数。设 B 为代数 A 的子代数，论文首先证明了 $\mathcal{DP}(A)=\mathrm{add}(A\otimes_B\mathcal{DP}(B))$，见定理 2.3。其次，证明 Ding 投射维数，整体 Ding 投射维数和有限 Ding 投射维数之间的关系：① $\mathrm{Dpd}({}_AM)=\mathrm{Dpd}({}_BM)$；② $\mathrm{gl.DPD}(A)\le \mathrm{gl.DPD}(B)$，$\mathrm{FDPD}(A)\le \mathrm{FDPD}(B)$，见定理 2.4-2.5。最后，作为推论可以得到 Crossed product $A\#_\sigma H$ 和 Twisted smash product $A*H$ 的整体 Ding 投射维数和有限 Ding 投射维数的关系：① $\mathrm{gl.DPD}(A\#_\sigma H)\le \mathrm{gl.DPD}(A)$，$\mathrm{FDPD}(A\#_\sigma H)\le \mathrm{FDPD}(A)$；② $\mathrm{gl.DPD}(A*H)\le \mathrm{gl.DPD}(A)$，$\mathrm{FDPD}(A*H)\le \mathrm{FDPD}(A)$，见推论 2.11-2.12.

1 预备知识

先回顾一下 Hopf-Galois 扩张的定义及相关性质。

定义 1.1[10]：Hopf 代数 H 是指对任意 $h\in H$，代数 (H,m,μ) 和余代数 (H,Δ,ε) 满足：

①$(H,m,\mu,\Delta,\varepsilon)$ 为双代数。

②存在对极映射 $S:H\to H$ 满足：

$$\sum(Sh_1)h_2=\varepsilon(h).1_H=\sum h_1(Sh_2)$$

定义 1.2[11]：设 A 为有单位元的左 H - 模，通过 $h\otimes a\mapsto ha\in A$，使得：

$$h\cdot(ab)=\sum\nolimits_h h_1\cdot a\otimes h_2\cdot b \text{ 且 } h\cdot 1=\varepsilon(h)\cdot 1$$

其中，$a,b\in A$，$h\in H$，则称 A 为左 H- 模代数，也称 H 作用于 A。

设 A 为有余单位的右 H- 余模，通过 $\delta_A(a)=\sum_a a_0\otimes$

$a_1 \in A \otimes_k H$，使得 δ_A 是代数映射，其中 $a_0, a_1 \in A$，则称 A 为右 H- 余模代数，也称 H 余作用于 A。

其中，H 作用于 A 的不变量为：

$$A^H := \{a \in A \mid h \cdot a = \varepsilon(h)a, \forall h \in H\}$$

H 余作用于 A 的余不变量为：

$$A^{coH} := \{a \in A \mid \delta_A(a) = a \otimes 1_H\}$$

定义 1.3[11]：设 $B \subset A$ 为 k- 代数，H 为 Hopf 代数，若 A 为右 H- 余模代数且 $B = A^{coH}$，则称 $B \subset A$ 为右 H- 扩张，记为 A/B。

定义 1.4[11]：设 A 为右 H- 余模代数，其结构映射为 ρ: $A \to A \otimes_k H$，若映射：

$$\beta\colon A \otimes_B A \to A \otimes_k H,\quad a \otimes b \mapsto (a \otimes 1)\rho(b)$$

是双射，则称右 H- 扩张 A/B 为右 H-Galois 扩张。

考虑以下两个函子：

$$A \otimes_B -\colon \mathrm{Mod}(B) \to \mathrm{Mod}(A),\quad M \mapsto A \otimes_B M$$

$$_B(-)\colon \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Mod}(B),\quad M \mapsto M$$

其中，$_B(-)$ 为限制函子，且限制函子为正合函子。

引理 1.5[6]：设 A/B 为有限维 Hopf 代数 H 上的右 H-Galois 扩张，则：

$$(A \otimes_B -, {}_B(-)) \text{与} ({}_B(-), A \otimes_B -)$$

均为伴随对。

注 1.6：设 (F, G) 为阿贝尔范畴中的伴随对，若 G 为正合函子，则 F 保持投射对象；若 F 为正合函子，则 G 保持内射对象。

引理 1.7[3]：设 A/B 为有限维 Hopf 代数 H 上的右 H-Galois 扩张，则 A 作为左、右 B - 模均是投射的。

引理 1.8[10]：设 H 为半单 Hopf 代数，则 H 为有限维 Hopf 代数。

引理 1.9[8]：设 A/B 为半单 Hopf 代数 H 上的右 H-Galois 扩张，对任意左 A- 模 M，则 M 为 $A \otimes_B M$ 的直和项。

最后，我们回顾一下 Ding 投射模及其维数的定义及性质。

定义 1.10[5]：设 M 为左 A- 模，若存在投射左 A- 模的正合序列：

$$\mathbf{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P_0 \to P_{-1})$，且对任意平坦左 A- 模 F，序列 $\mathrm{Hom}_A(\mathbf{P}, F)$ 是正合的，则称 M 为 Ding 投射模。

定义 1.11[5,7]：设 M 为左 A- 模，定义 M 的 Ding 投射维数为：

$$\begin{aligned}\inf\{n \mid \text{存在正合列} 0 \to D_n \to D_{n-1} \to \cdots \to D_1 \to D_0 \\ \to M \to 0; \forall D_i \in \mathcal{DP}(A)\}\end{aligned}$$

记为 $\mathrm{Dpd}({}_AM)$。若这样的 n 不存在，则记 $\mathrm{Dpd}({}_AM) = \infty$。

相应地，可定义代数 A 的整体 Ding 投射维数为：

$$\mathrm{gl.DPD}(A) = \sup\{\mathrm{Dpd}({}_AM) \mid M \in \mathrm{Mod}(A)\}$$

定义代数 A 的有限 Ding 投射维数为：

$$\mathrm{FDPD}(A) = \sup\{\mathrm{Dpd}({}_AM) \mid M \in \mathrm{Mod}(A) \text{且} \mathrm{Dpd}({}_AM)\}$$

2 Hopf–Galois 扩张下的 Ding 投射模及其维数

引理 2.1：设 A/B 为有限维 Hopf 代数 H 上的右 H-Galois 扩张，若 F 为平坦左 A- 模，则 F 为平坦左 B- 模。

证明：由于 $\dim(H) < \infty$，则 A 为投射左 B- 模，于是对任意右 B- 模的正合序列：

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

有：

$$0 \to X \otimes_B A \to Y \otimes_B A \to Z \otimes_B A \to 0$$

是右 A- 模的正合序列。设 F 为平坦左 A- 模，由同构式：

$$(X \otimes_B A) \otimes_A F \cong X \otimes_B (A \otimes_A F) \cong X \otimes_B F$$

知：

$$0 \to X \otimes_B F \to Y \otimes_B F \to Z \otimes_B F \to 0$$

是正合的，故 F 是平坦左 B- 模。

引理 2.2：设 A/B 为有限维 Hopf 代数 H 上的右 H-Galois 扩张。

①若 M 为 Ding 投射左 A- 模，则 M 为 Ding 投射左 B- 模。

②若 M 为 Ding 投射左 B- 模，则 $A \otimes_B M$ 为 Ding 投射左 A- 模。

证明：①设 M 是 Ding 投射左 A- 模，则存在投射左 A- 模的正合序列：

$$\mathbf{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P_0 \to P_{-1})$，且对任意平坦左 A- 模 F，$\mathrm{Hom}_A(\mathbf{P}, F)$ 是正合的。由于 $\dim H < \infty$，则 A 是投射左 B- 模。设 N 为任意平坦左 B- 模，由 [12] 定理 5 可知存在同构式：

$$\mathrm{Hom}_B(A, N) \cong A \otimes_B N$$

则 $\mathrm{Hom}_B(A, N)$ 为平坦左 A- 模，故 $\mathrm{Hom}_A(\mathbf{P}, \mathrm{Hom}_B(A, N))$ 是 B- 模的正合序列。又由于 $({}_B(-), A \otimes_B -)$ 是伴随对，且 $A \otimes_B -$ 是正合函子，则 P_i 为平坦左 B- 模，从而 $\mathbf{P}$ 也是投射左 B - 模的正合序列。最后由同构式：

$$\mathrm{Hom}_B(\mathbf{P}, N) \cong \mathrm{Hom}_B(A \otimes_A \mathbf{P}, N) \cong \mathrm{Hom}_A(\mathbf{P}, \mathrm{Hom}_B(A, N))$$

可知 M 是 Ding 投射左 B- 模。

②设 M 是 Ding 投射左 B- 模，则存在投射左 B- 模的正合序列：

$$\mathbf{P} = \cdots \to P_1 \to P_0 \to P_{-1} \to \cdots$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker}(P_0 \to P_{-1})$，且对任意平坦左 B- 模 F，序列 $\mathrm{Hom}_B(\mathbf{P}, F)$ 是正合的。由于 $\dim H < \infty$，则 $(A \otimes_B -, {}_B(-))$ 是伴随对且由限制函子是正合函子可知 $A \otimes_B P_i$ 为投射左 A- 模，从而 $A \otimes_B \mathbf{P}$ 是投射左 A- 模的正合序列且 $A \otimes_B M \cong \mathrm{Ker}(A \otimes_B P_0 \to A \otimes_B P_{-1})$。

设 N 为任意左 A- 模，则由引理 2.1 可知，N 为平坦左 B- 模，由同构式：

$$\mathrm{Hom}_A(A\otimes_B \mathbf{P},N)\cong \mathrm{Hom}_B(\mathbf{P},\mathrm{Hom}_A(A,N))\cong \mathrm{Hom}_B(\mathbf{P},N)$$

可知，$\mathrm{Hom}_A(A\otimes_B \mathbf{P},N)$ 是正合的，故 $A\otimes_B M$ 是 Ding 投射左 A- 模。

定理 2.3：设 A/B 是半单 Hopf 代数 H 上的右 H-Galois 扩张，则有：

$$\mathcal{DP}(A)=\mathrm{add}(A\otimes_B \mathcal{DP}(B))$$

证明：一方面，对任意 Ding 投射左 A- 模 M，由引理 1.9 可知 M 是 $A\otimes_B M$ 的直和项，即 $M\in \mathrm{add}(A\otimes_B \mathcal{DP}(B))$，故 $\mathcal{DP}(A)\subseteq \mathrm{add}(A\otimes_B \mathcal{DP}(B))$。

另一方面，对任意 Ding 投射左 B- 模 N，由引理 2.2 可知 $A\otimes_B N$ 是 Ding 投射左 A- 模且由 [7] 推论 2.7 可知其直和项也为 Ding 投射左 A- 模，故 $\mathrm{add}(A\otimes_B \mathcal{DP}(B))\subseteq \mathcal{DP}(A)$。

定理 2.4：设 A/B 是半单 Hopf 代数 H 上的右 H-Galois 扩张，则对任意左 A- 模 M，有：

$$\mathrm{Dpd}({}_A M)=\mathrm{Dpd}({}_B M)$$

证明：$\mathrm{Dpd}({}_A M)\geq \mathrm{Dpd}({}_B M)$ 是显然的，下证 $\mathrm{Dpd}({}_A M)\leq \mathrm{Dpd}({}_B M)$。设 $\mathrm{Dpd}({}_B M)=n<\infty$，则存在 ${}_B M$ 的长度为 n 的 Ding 投射分解：

$$0\to D_n\to D_{n-1}\to\cdots\to D_1\to D_0\to M\to 0$$

由引理 1.8 和引理 2.2 知 $A\otimes_B D_i (i=1,2,\cdots,n)$ 为 Ding 投射左 A- 模，则 $\mathrm{Dpd}(A\otimes_B M)\leq n$，又由引理 1.9 可知 ${}_A M$ 为 $A\otimes_B M$ 的直和项，则：

$$\mathrm{Dpd}({}_A M)\leq \mathrm{Dpd}({}_A(A\otimes_B M))\leq \mathrm{Dpd}({}_B M)=n$$

因此，$\mathrm{Dpd}({}_A M)=\mathrm{Dpd}({}_B M)$ 得证。

由以上定理可得关于整体 Ding 投射维数和有限 Ding 投射维数的结论。

定理 2.5：设 A/B 为半单 Hopf 代数 H 上的右 H-Galois 扩张，有：

$$\mathrm{gl.DPD}(A)\leq \mathrm{gl.DPD}(B)$$
$$\mathrm{FDPD}(A)\leq \mathrm{FDPD}(B)$$

由 [13] 定理 2.28 可知，$\mathrm{FDPD}(A)=\mathrm{FGPD}(A)=\mathrm{FPD}(A)$，进而由定理 2.5 可得以下推论。

推论 2.6：设 A/B 为半单 Hopf 代数 H 上的右 H-Galois 扩张，有：

$$\mathrm{FGPD}(A)\leq \mathrm{FGPD}(B)$$
$$\mathrm{FPD}(A)\leq \mathrm{FPD}(B)$$

作为应用，我们可得关于 Crossed product $A\#_\sigma H$ 与 Twisted smash product $A*H$ 的推论。

定义 2.7[10,14,15]：若存在 k- 线性映射 $H\otimes_k A\to A$，定义为 $h\otimes a\mapsto h\cdot a$，使得对任意 $a,b\in A$，$h\in H$，满足 $h\cdot 1=\varepsilon(h)\cdot 1$ 且 $h\cdot(ab)=\sum(h_1\cdot a)(h_2\cdot b)$，则称 H 度量代数 A。

定义 2.8[10,14,15]：设 $\sigma\in \mathrm{Hom}_k(H\otimes_k H,A)$，若存在 $\tau\in \mathrm{Hom}_k(H\otimes_k H,A)$，使得对任意 $h,g\in H$，满足：

$$(\sigma*\tau)(h\otimes g)=\sigma(h_1,g_1)\tau(h_2,g_2)=\varepsilon(h)\varepsilon(g)1_A$$

且：

$$(\tau*\sigma)(h\otimes g)=\tau(h_1,g_1)\sigma(h_2,g_2)=\varepsilon(h)\varepsilon(g)1_A$$

则称 σ 为卷积可逆映射。

定义 2.9[10,14,15]：设 H 度量 A，$\sigma\in \mathrm{Hom}_k(H\otimes_k H,A)$ 为卷积可逆映射，A 与 H 的 Crossed product $A\#_\sigma H$ 定义为线性空间 $A\otimes_k H$ 及其乘法：

$$(a\#_\sigma h)(b\#_\sigma g)=a(h_1\cdot b)\sigma(h_2,g_1)\#_\sigma h_3 g_2$$

其中，$a,b\in A$，$h,g\in H$。

定义 2.10[16]：设 A 为 H- 双模代数，其左 H- 模作用为 $\to$，其右 H- 模作用为 $\leftarrow$，A 与 H 的 Twisted smash product $A*H$ 定义为向量空间 $A\otimes_k H$ 及其乘法：

$$(a*h)(b*g)=a(h_1\to b\leftarrow S(h_3))*h_2 g$$

其中，$a,b\in A$，$h,g\in H$。

由 [15] 定理 1.18 可知，$A\#_\sigma H/A$ 为右 H-Galois 扩张，由定理 2.5 可得：

推论 2.11：设 H 半单 Hopf 代数，有：

$$\mathrm{gl.DPD}(A\#_\sigma H)\leq \mathrm{gl.DPD}(A)$$
$$\mathrm{FDPD}(A\#_\sigma H)\leq \mathrm{FDPD}(A)$$

由 [8] 命题 2.8 可知，$A*H/A$ 为右 H-Galois 扩张，由定理 2.5 可得：

推论 2.12：设 H 半单 Hopf 代数，有：

$$\mathrm{gl.DPD}(A*H)\leq \mathrm{gl.DPD}(A)$$
$$\mathrm{FDPD}(A*H)\leq \mathrm{FDPD}(A)$$

参考文献：

[1] CHASE S U, HARRISON D K, ROSENBERG A. Galois theory and cohomology of commutative rings[M]. Memoirs of the American Mathematical Society,American Mathematical Society: Providence, RI, U.S.A,1965(52).

[2] CHASE S U, SWEEDLER M E. Hopf algebras and Galois theory[M]. Lecture Notes in Mathematics, Springer: Berlin/Heidelberg,Germany,1969(97).

[3] KREIMER H F, TAKEUCHI M. Hopf algebras and Galois extensions of an algebra[J]. Indiana University Mathematics Journal,1981,30(5):675-692.

[4] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective modules and projective modules[J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(4):611-633.

[5] DING N, LI Y, MAO L. Strongly Gorenstein flat modules[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2009,86(3):323-338.

[6] GILLESPIE J. Model structures on modules over Ding-Chen rings[J]. Homology Homotopy and Applications,2010(12):61-73.

[7] YANG G, LIU Z, LIANG L. Ding projective modules and injective modules[J].Algebra Colloquium,2013,20(4):601-612.

[8] LIU L, GUO Q. Global and finitistic dimension of Hopf-Galois

extensions[J]. Turkish Journal of Mathematics,2013,37(2):210-217.

[9] GUO Q, SHAN T, SHEN B, et al. Gorenstein Flat Modules of Hopf-Galois Extensions[J]. Mathematics,2023,11(11):2542.

[10] MONTGOMERY S. Hopf algebras and their actions on rings[M]. American Mathematical Society,1993.

[11] MONTGOMERY S. Hopf Galois theory:a survey[J]. New topological contexts for Galois theory and algebraic geometry (BIRS 2008),2009(16):367-400.

[12] DOI Y. Hopf extensions of algebras and Maschke type theorems[J]. Israel Journal of Mathematics,1990(72):99-108.

[13] HOLM H. Gorenstein homological dimensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra,2004,189(1):167-193.

[14] BLATTNER R, COHEN M, MONTGOMERY S. Crossed products and inner actions of Hopf algebras[J]. Transactions of the American Mathematical Society,1986,298(2):671-711.

[15] BLATTNER R, MONTGOMERY S. Crossed products and Galois extensions of Hopf algebras[J]. Pacific Journal of Mathematics,1989,137(1):37-54.

[16] WANG S, LI J. On twisted smash products for bimodule algebras and the Drinfeld double[J]. Communications in Algebra, 1998,26(8):2435-2444.

作者简介：杨淑静（2000-），女，土家族，中国重庆人，硕士，从事同调代数研究。