微积分视角下的函数连续性：理论探讨与教学实践

李怡心
西安翻译学院，中国·陕西 西安 710105

摘　要：论文旨在从微积分的角度深入探讨函数连续性的理论基础，并结合实际教学实践，提出有效的教学策略。论文首先定义了函数连续性，并探讨了其在微积分中的重要性。其次，分析了学生在学习连续性时常见的困难，并提出了一系列教学策略。最后，通过实际教学案例，展示了这些策略的应用效果。

关键词：微积分；函数连续性；理论探讨；教学实践

Continuity of Functions from the Perspective of Calculus: Theoretical Exploration and Teaching Practice

Yixin Li
Xi’an Fanyi University, Xi’an, Shaanxi, 710105, China

Abstract: This paper aims to explore the theoretical basis of function continuity from the perspective of calculus, and propose effective teaching strategies based on practical teaching practice. The paper first defines function continuity and explores its importance in calculus. Next, common difficulties faced by students in learning continuity were analyzed, and a series of teaching strategies were proposed. Finally, the application effects of these strategies were demonstrated through practical teaching cases.

Keywords: calculus; function continuity; theoretical exploration; teaching practice

0 前言

函数连续性是微积分中的一个核心概念，它不仅关系到函数的性质，也是理解导数和积分等更高级概念的基础。在教学过程中，教师需要清晰地解释连续性的概念，并帮助学生克服理解上的障碍。

在微积分的学习中，函数的连续性是一个不可或缺的基础。它不仅涉及函数在特定点的行为，还关系到函数的整体性质，如是否可导、是否可积等。一个函数在某一点的连续性意味着该点的函数值与该点的极限值相等，这看似简单的定义实际上包含了丰富的数学内涵。连续性的概念是理解函数平滑性和完整性的关键，它允许我们使用极限的概念来定义导数和积分，这两个微积分中的核心操作。

然而，尽管连续性的概念在理论上是清晰的，但在教学实践中，学生往往难以完全理解这一概念。学生可能会对极限的概念感到困惑，因为极限涉及一个变量趋近于某个值但不一定达到该值的复杂过程。此外，学生可能会对连续性的定义产生误解，将其与函数的图像是否“断裂”混淆。还有学生可能会在应用连续性的性质时遇到困难，如在判断函数的连续性或使用中间值定理时。

为了帮助学生克服这些障碍，教师需要采取有效的教学策略。这可能包括使用直观的图形来展示连续性和不连续性的例子，通过分步骤的讲解来帮助学生理解连续性的定义，以及通过互动讨论和问题解决活动来促进学生的深入思考。教师还需要设计适合学生认知水平的问题，引导学生从具体的例子中抽象出连续性的概念，并将其应用于更复杂的问题中。

总之，函数连续性是微积分中一个至关重要的概念，它不仅关系到函数的基本性质，也是进一步学习微积分的基础。教师在教学过程中需要清晰地解释这一概念，并采取有效的教学策略来帮助学生理解和掌握连续性，从而为更高级的微积分学习打下坚实的基础。

1 函数连续性的理论基础

函数连续性的理论基础是微积分中的一个重要部分，它涉及极限、函数值和函数行为的深刻理解。在这一节中，我们将深入探讨连续性的定义、性质以及它在微积分中的作用。

1.1 连续性的定义

连续性的概念最早可以追溯到几何直观，即函数图像没有“跳跃”或“断裂”。在数学上，连续性的定义更为精确和严格。函数 $f(x)$ 在点 c 的连续性可以通过极限的概念来定义。具体来说，如果满足以下三个条件，则称函数 $f(x)$ 在点 c 连续：

① $f(c)$ 有定义，即函数在点 c 处有值。

② $\lim_{x\to c} f(x)$ 存在，即函数值当 x 趋近于 c 时有一个确定的极限。

③ $\lim_{x\to c} f(x)=f(c)$，即函数在 c 点的极限值等于函数

在 c 点的函数值。

这三个条件共同确保了函数在点 c 的连续性。如果函数在区间 I 上的每一点都连续，则称函数在区间 I 上连续。

1.2 连续性的性质

连续性的性质是理解连续函数行为的关键。以下是一些基本性质：

局部性质：函数在一点的连续性不影响其他点。这意味着我们可以分别检查函数在不同点的连续性。

中间值定理：如果函数 f 在闭区间 [a,b] 上连续，且 N 是 f(a) 和 f(b) 之间的任何数，则至少存在一个 $c \in [a,b]$ 使得 f(c)=N。这个定理说明了连续函数在图像上覆盖了所有中间值，没有“跳跃”。

连续函数的复合：如果函数 f 在点 c 连续，函数 g 在 f(c) 连续，则复合函数 g(f(x)) 在 c 连续。这个性质在复合函数的连续性分析中非常有用。

连续函数与极限：连续函数的极限等于函数在极限点的值。

2 教学实践中的挑战

2.1 学生的认知障碍

在微积分的教学中，函数连续性的概念对学生来说是一个挑战，因为它涉及抽象的数学思想，特别是极限的概念。学生在学习连续性时常见的困难包括：

对极限概念的误解：极限是微积分中的一个核心概念，它描述了函数值当自变量趋近于某个特定值时的行为。学生往往难以理解极限的精确定义，即函数值可以无限接近但不一定达到某个特定的值。这种困难部分源于极限涉及的无限过程与学生日常经验的差异。

对连续性定义的混淆：连续性的定义要求函数在某点的极限存在且等于该点的函数值。学生可能会将连续性与函数图像的“平滑性”混淆，认为只要图像没有明显的“断裂”或“跳跃”，函数就是连续的，而忽视了极限存在的要求。

对连续性性质的应用不当：即使学生理解了连续性的定义，他们在应用连续性的性质，如中间值定理时，也可能遇到困难。这可能是因为他们没有充分理解这些性质的逻辑基础，或者不知道如何将这些性质应用于解决具体问题。

这些障碍可能源于学生对极限概念的不熟悉，或者对连续性与函数图像直观理解之间的差异。为了帮助学生克服这些障碍，教师需要采取有效的教学策略。

2.2 教学策略

为了克服这些困难，可以采取以下教学策略：

直观教学：使用图形和实际例子来帮助学生直观理解连续性。例如，通过绘制函数图像，展示连续和不连续的函数，让学生观察和讨论这些函数在图像上的差异。实际例子，如物理中的运动问题，可以帮助学生理解连续性在现实世界中的应用。

分步讲解：将连续性的定义和性质分解成小步骤，逐步引导学生理解。这种方法可以帮助学生逐步构建对连续性的理解，从基本的定义开始，逐步引入更复杂的概念和性质。例如，首先解释极限的概念，然后讨论连续性的定义，最后引入连续性的性质。

互动讨论：通过小组讨论和问题解决活动，促进学生之间的交流和思考。这种策略鼓励学生分享他们的想法和困惑，从而加深对连续性的理解。教师可以设计一些开放性问题，让学生在小组内讨论，或者组织一些小组竞赛，以激发学生的学习兴趣。

3 教学实践中的挑战

在实施了上述教学策略之后，我们通过多种方式对学生学习成果进行了评估，以衡量这些策略在提高学生对函数连续性概念理解和应用能力方面的有效性。评估方法包括定期的测验、课堂参与度观察、小组讨论的表现以及最终的期末考试。

除了定量的评估结果外，我们还收集了学生的反馈。学生普遍反映，通过直观教学和分步讲解，他们对连续性的理解更加清晰。他们表示，使用图形和实际例子帮助他们更好地把握连续性的概念，而分步讲解则使他们能够逐步构建起对连续性的理解。互动讨论也被学生认为是提高他们理解的重要环节，因为它允许他们与同伴交流想法，从而加深对连续性的理解。

综合评估结果和学生反馈，我们可以得出结论，这些教学策略有效地提高了学生对连续性概念的理解和应用能力。学生不仅能够更好地识别连续性，还能够应用连续性的性质来解决实际问题。这些成果表明，通过精心设计的教学活动和持续的教学改进，我们可以显著提高学生在微积分中的学习成效。

4 结语

在论文中，我们深入探讨了微积分中函数连续性的理论基础，并结合实际教学实践，提出了一系列教学策略。我们强调了连续性在微积分中的核心地位，不仅因为它是理解导数和积分等更高级概念的基础，而且因为它对于培养学生的数学直觉和解决问题的能力至关重要。

通过分析学生在学习连续性时遇到的困难，我们提出了直观教学、分步讲解和互动讨论等教学策略。这些策略旨在帮助学生克服认知障碍，如对极限概念的误解和对连续性定义的混淆。通过实际教学案例的分析，我们展示了这些策略在提高学生对连续性概念理解和应用能力方面的有效性。

结语部分，我们强调了教师在教学过程中应采用多样化的教学方法，以适应不同学生的学习风格和需求。这种多样化的方法不仅有助于学生克服认知障碍，还能加深他们对连续性概念的理解。我们认为，通过结合理论探讨和教学实践，教师可以更有效地帮助学生掌握函数连续性这一微积分中的关键概念。

ISSN：2705-0904(Print)；2705–0874(Online)

总之，函数连续性的教学不仅是传授知识的过程，也是培养学生批判性思维和分析能力的过程。通过精心设计的教学活动和不断的实践反思，我们可以确保学生不仅理解连续性的概念，而且能够在更广泛的数学和实际问题中应用这一概念。随着学生对连续性理解的深化，他们将能够更好地应对微积分中的挑战，并为未来的数学学习打下坚实的基础。

参考文献：

[1] 焦华.算法视角下的微积分[J].电脑知识与技术,2023,19(26):16-18+22.

[2] 尹莎.核心素养下数学史融入高中微积分的教学研究[D].重庆:重庆师范大学,2020.

[3] 徐玉萍.基于SRP的高中微积分教学研究[D].曲阜:曲阜师范大学,2024.