

复数概念教学中的若干要点探究

余保民

渭南师范学院 数学与统计学院, 中国·陕西 渭南 714099

摘要: 论文针对数学与应用数学专业(师范)专业《复变函数》课程中复数概念的教学实践, 系统探讨了提升教学有效性的四个核心要点。首先, 强调在复数不同表示形式中起关键作用的实部/虚部与模/辐角两组参量的内在联系及其转换关系, 揭示几何表示对两组量的统一性。其次, 突出复数的几何应用价值。再次, 注重课程间横向联系。最后, 紧密结合《普通高中数学课程标准》对复数的教学要求, 阐明《复变函数》学习对师范生储备高阶知识、提升中学教学能力的关键作用。旨在为师范生复数教学的专业化发展提供理论支撑与实践参考。

关键词: 复变函数; 复数; 几何应用; 课程联系

Exploration of Several Key Points in the Teaching of Complex Concepts

Baomin Yu

School of Mathematics and Statistics, Weinan Normal University, Weinan, Shaanxi, 714099, China

Abstract: This paper systematically explores four core points for improving teaching effectiveness in the teaching practice of complex concepts in the course of *Complex Variable Functions* for mathematics and applied mathematics majors (teacher training). Firstly, it emphasizes the intrinsic connection and transformation relationship between the real/imaginary parts and the modulus/radiation angle parameters, which play a key role in different representations of complex numbers, revealing the unity of geometric representation over the two sets of quantities. Secondly, highlight the geometric application value of complex numbers. Again, pay attention to the horizontal connections between courses. Finally, closely combining with the teaching requirements for complex numbers in the *General High School Mathematics Curriculum Standards*, this paper elucidates the key role of studying *Complex Variable Functions* in enabling normal students to acquire higher-order knowledge and enhance their teaching abilities in secondary schools. Intended to provide theoretical support and practical reference for the professional development of plural teaching for teacher trainees.

Keywords: complex variable functions; complex number; geometric applications; course contact

0 前言

复变函数以复数理论为基础, 主要研究复数域上解析函数的性质, 其理论已经被广泛应用于代数学、解析数论、微分方程等数学分支, 同时也在物理和工程等诸多领域有着广泛的应用。作为数学与应用数学专业(师范)的核心专业课程之一, 复变函数不仅承担着提升学生数学专业素养的使命, 也肩负着为未来中学数学教学储备高阶知识体系的职责。通过系统的学习, 不仅能使学生站在更高的维度审视和理解中学数学中的复数知识体系, 也能培养将抽象思维转化为教学实践的能力。

复数的概念不但是复变函数的基础, 也是学生将来在中学数学中教学的一个重要内容。在复数概念的教学实践中, 需要关注以下几点。

1 重点把握两组量及其转换关系

复数有多种表示方式:

①代数形式。任一复数都可表示为 $z = x + iy$ 的形式, 其中 x 和 y 都为实数, i 为虚数单位, x 和 y 分别称为复数 z 的实部和虚部。

②实数对表示。映射 $x + iy \mapsto (x, y)$ 建立了复数集和有

序实数全体之间的一个一一对应, 即任一复数本质上是由一个有序实数对 (x, y) 唯一确定的。因此, 可以用有序实数对 (x, y) 表示复数 $z = x + iy$ 。

③点表示。有序实数对和平面上的点是一一对应的, 因此由复数的实数对形式, 可以得到复数的点表示, 即用平面上横坐标为 x , 纵坐标为 y 的点来表示复数 $z = x + iy$ 。

④向量表示。在平面上, 连接原点 O 和点 $z = x + iy$ 的向量 \vec{Oz} 与 $z = x + iy$ 也是一一对应的, 因此可以用此向量 \vec{Oz} 表示复数 $z = x + iy$ 。

⑤三角表示。平面上的点也可以用极坐标来表示。当原点和直角坐标系的原点重合时, 也可以极坐标 r 和 θ 表示复数 z , 这里 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 为向量 \vec{Oz} 的长度, θ 表示向量 \vec{Oz} 与 x 轴正向的夹角, 分别称为复数 z 的模和辐角。利用直角坐标和极坐标的关系: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 可以得到复数的三角表示: $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ 。

⑥指数形式。利用欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ 及复数的三角表示, 可以得到复数的指数表示 $z = re^{i\theta}$ 。

在教学实践中, 使学生理解和掌握复数的这些表示, 关键要把握两组量及其转换关系: 一组量是实部 x 和虚部 y ; 另一组量是模 r 和辐角 θ 。这两组参量通过转换公式:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \text{ 与 } \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan \theta = \frac{y}{x} \end{cases}$$

实现了双向转换。代数表示、实数对表示主要由量 x 和 y 确定，三角表示和指数表示主要由量 r 和 θ 确定，而点表示和向量表示既由量 x 和 y 又由量 r 和 θ 确定，二者直观展示了这两组量的几何对应关系。

2 强调复数的几何应用

复数的几何意义为理解复数提供了直观的方式。复数 $z = x + iy$ 与平面上的坐标为 (x, y) 的点有一一对应的关系，通过这种对应关系，可以将抽象的复数转化为直观的图形，有助于学生理解复数的概念，培养学生用数形结合的方法解决实际问题的能力。

复数的几何应用把复数的代数应用和平面几何相结合，主要用到以下的对应关系：

- ①复数的加减法对应向量的加减；
- ②复数的乘法对应向量的旋转和缩放；
- ③向量的平移对应于运算 $z \mapsto z + a$ ；
- ④反射变换对应于共轭运算。

在解决几何问题时，常用的代数方法为：

- ①三点 z_1, z_2, z_3 共线的充要条件为 $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$ 为实数；
- ②向量 $z_1 - z_2$ 和 $z_3 - z_4$ 垂直的充要条件是 $\frac{z_1 - z_2}{z_3 - z_4}$ 为纯虚数；

虚数；

- ③方程 $|z - a| = r$ 表示以 a 为圆心、 r 为半径的圆周； $|z - a| + |z - b| = c$ 表示椭圆； $||z - a| - |z - b|| = c$ 表示双曲线。

3 重视课程之间的联系

学生在学习专业课程的过程中，常常是孤立地学习某一课程，很难去主动建立各课程之间的联系。因此，教师在授课过程中，应该有意识的渗透各专业课程之间的联系，使学生认识到各专业课之间不是孤立的，而是一个有机的整体。

李尚志老师^[1]从复数的几何模型和多项式的带余除法出发，说明了复数存在的合理性，并给出了复数的多项式表示。杨鹏和教传玲^[2]从线性代数的角度解释了复数的合理性，指出复数域与实数域 \mathbf{R} 上集合：

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

按矩阵的加法和乘数运算构成的矩阵同构。由于课时的限制，在课堂上，很难有充分时间对上面的结论进行完整的推理证明。但是利用复数乘法的变换性质，可以向学生渗透这种复数和矩阵之间的联系。

对于两个非零复数 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ 和 $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ ， $z_1 z_2$ 相当于

把 z_2 所对应的向量旋转一个角度 θ_1 ，再把长度伸缩 r_1 倍得到的结果^[3]。回顾在线性代数中，向量的伸缩等价于乘数运算，旋转变换可以用矩阵：

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}$$

表示^[4]。因此， $z_1 z_2$ 相当于把 z_2 对应的平面向量 (x_2, y_2) 通过矩阵和数乘复合作用。

$$r_1 \begin{pmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cos \theta_1 & r_1 \sin \theta_1 \\ -r_1 \sin \theta_1 & r_1 \cos \theta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

得到的向量。反之，容易验证，用矩阵：

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}$$

作用于向量 $(x_2, y_2)^T$ ，等价于复数 $z_1 = x_1 + iy_1$ 和 $z_2 = x_2 + iy_2$

的乘积。所以，任何一个复数 $z = x + iy$ 都可以用一个矩阵

$$\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \text{ 表示。}$$

4 深入理解高中数学课程标准中的相关要求

在《普通高中数学课程标准(2017年版2020年修订)》^[5]中，复数作为必修模块被放在“几何与代数”主题，内容包括：复数的概念、复数运算、复数的三角表示等方面。课标中明确规定，通过这部分内容的学习，帮助学生通过方程求解，理解引入复数的必要性，了解数系的扩充，掌握复数的表示、运算及其几何意义。因此，对于数学专业师范生而言，《复变函数》有助于提升师范生的专业素养和能力，是其职前培养的关键环节。通过《复变函数》特别是复数概念的学习，将为师范生未来从事中学数学教学工作积累了不可或缺的知识储备，能使师范生在未来教学中更加得心应手。

除了深入理解课标中的相关要求外，在教学实践中，应该让学生主动关注高考内容中相关内容的考点和考查方式，了解当前数学教育改革的动向。

参考文献：

- [1] 李尚志.大学视角下的中学数学(复数)[J].数学通报,2019,58(6):1-8.
- [2] 杨鹏,教传玲.从线性代数的角度看复变函数[J].高等数学研究,2024,27(5):48-49+82.
- [3] 钟玉泉.复变函数论[M].5版.北京:高等教育出版社,2021.
- [4] 同济大学数学系编.线性代数[M].6版.北京:高等教育出版社,2014.
- [5] 中华人民共和国教育部.普通高中数学课程标准[M].2017年版2020修订.北京:人民教育出版社,2020.

作者简介：余保民(1973-)，男，中国陕西富平人，教授，从事半群与半环代数理论研究。

基金项目：陕西省教育科学“十四五”规划专项课题，项目编号：SWNZ2413；渭南师范学院教育教学改革研究项目，项目编号：2022JYKX50、2025HX280。