# 从星形线切线性质到挂谷猜想：定长线段旋转的面积压缩之旅

吕川 吴瑞华
中国石油大学 ( 华东 ) 理学院，中国·山东 青岛 266580

**摘要：**本文从本科微积分中经典的星形线切线性质出发，首先证明其第一象限内任意切线被坐标轴截得线段为定值的核心性质，揭示其作为定长线段 360° 旋转包络线的特殊情况；通过与三尖瓣线、佩龙树等构造的面积对比，展现分形方法对旋转区域的压缩潜力；最终自然引出贝西科维奇集与挂谷猜想，介绍其测度性质、与调和分析的联系以及 2025 年三维挂谷猜想的重大突破，为微积分教学提供一个连接经典知识与前沿研究的典型案例。
**关键词：**星形线；切线；挂谷集

## From the Tangent Properties of the Astroid to the Kakeya Conjecture: The Area-Compressing Journey of a Rotating Fixed-Length Line Segment

**Lv Chuan，Wu Ruihua**
College of Science, China University of Petroleum (East China), China Shandong Qingdao 266580

**Abstract:** Starting from the classical tangent property of the astroid in undergraduate calculus, this paper first proves the core property that any tangent line in the first quadrant intercepts a fixed-length segment on the coordinate axes, revealing that the astroid is a special case of the envelope of a rotating line segment of fixed length. By comparing the area with constructions such as the deltoid and the Perron tree, it demonstrates the potential of fractal methods in compressing the area swept by a rotating segment. Finally, it naturally leads to the Besicovitch set and the Kakeya conjecture, introducing their measure-theoretic properties, connections with harmonic analysis, and the significant breakthrough of the three-dimensional Kakeya conjecture in 2025. This paper provides a typical example of connecting classical knowledge with cutting-edge research in calculus teaching.
**Keywords:** Astroid; Tangent line; Kakeya set

## 1 引言：从星形线的经典性质出发

星形线是本科解析几何中的经典曲线，其直角坐标方程为：$x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.对应的参数方程为：

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t \\ y = a\sin^3 t \end{cases}，\ t\in[0,2\pi]\ .$$

首先证明其切线性质：

命题第一象限内星形线的任意切线，被两坐标轴截得的线段长度为定值 $a$.

证明：对参数方程求导数得切线斜率：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3a\sin^2 t\cos t}{-3a\cos^2 t\sin t}=-\tan t\ .$$

在点 $(a\cos^3 t，a\sin^3 t)$ 处的切线方程为：

$$y-a\sin^3 t=-\tan t\cdot(x-a\cos^3 t)\ .$$

求得在 $x$ 轴，$y$ 轴的截距分别为 $a\cos t$，$a\sin t$ 得到截线段长度为 $a$，与参数 $t$ 无关，命题成立。

这一性质揭示了星形线的几何意义：它是长度为 $a$ 的线段两端点分别在 $x$ 轴，$y$ 轴上滑动时的包络线，当线段从水平位置滑动到垂直位置时，刚好完成 90° 旋转，扫过的区域即为第一象限星形线与坐标轴围成的区域。这一构造是定长线段 360° 全角度旋转问题的特殊情况 .

计算星形线围成区域的面积：

$$S_{星}=4\int_0^a ydx=12a^2\int_0^{\pi/2}\sin^4 t\cos^2 t dt=\frac{3\pi a^2}{8}$$，仅为相同外接半径下圆面积 $\pi a^2$ 的 3/8，直接打破了“定长线段旋转区域最小为圆形”的直觉认知。

## 2 进阶构造：比星形线面积更小的旋转区域

星形线的结论引出一个自然的问题：如果我们需要让定长线段完成完整的 360° 旋转，所需的最小面积可以压缩到多小？本节介绍两种面积更小的经典构造。

### 2.1 三尖瓣线：面积最小的单连通区域

与星形线类似，三尖瓣线也是内摆线的一种，当小圆半径 $r$ 为大圆半径 $a$ 的 1/3 时生成，参数方程为：

$$\begin{cases} x = a(\frac{2}{3}\cos t + \frac{1}{3}\cos 2t) \\ y = a(\frac{2}{3}\sin t - \frac{1}{3}\sin 2t) \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

三尖瓣线可以容纳单位线段连续旋转 180°（重复两次可旋转 360°），通过格林公式计算其面积为：

$$S_{三尖瓣} = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[x(t)y'(t) - y(t)x'(t)]dt = \frac{2\pi a^2}{9}.$$

当 $a$=1 时，单位线段对应的三尖瓣线面积为 2π/9，仅为星形线第一象限面积的 16/27。这一构造由欧拉在 1745 年首次提出，是已知的光滑曲线中能容纳定长线段旋转的最小单连通区域[1]。

## 2.2 佩龙树：分形压缩的起点

1928 年，德国数学家佩龙（Perron）提出了一种基于分形的构造方法，可以将旋转区域的面积以指数级压缩[2]。

构造步骤[3]：

（1）取一个高为 1（对应单位线段长度）的等腰三角形 $T_0$，面积为 $S_0$，可容纳所有与竖直方向夹角在$[-\theta_0, \theta_0]$范围内的单位线段；

（2）将当前集合中的每个独立子三角形，沿底边中点分割为两个高度仍为 1 的子三角形，保持方向覆盖范围不变；

（3）将每个分割对中的右侧子三角形向左平移，使两个子三角形的底边重叠原长度的 1/2，此时重叠区域面积约为原来子三角形面积的 3/8，总面积压缩为原来的 5/8；

（4）重复步骤 (2)-(3) 共 $n$ 次，最终得到 $2^n$ 个独立的子三角形，重叠后总面积为 $S_0 \cdot (\frac{11}{16})^n$，当 $n\to\infty$ 时面积趋于 0，且仍能覆盖所有初始角度范围内的单位线段。

例如：取 θ=45°，则 $S_0$=1，迭代次数 $n$=5 时，$S_5 = \left(\frac{11}{16}\right)^5 \approx 0.1536$，仅为星形线第一象限面积的 26.1%。佩龙树构造的 Python 实现代码见附录。

# 3 贝西科维奇集：零面积的全方向线段集合

佩龙树的构造表明，通过分形重叠可以将特定角度范围内的旋转区域面积任意缩小。1928 年，苏联数学家贝西科维奇（Besicovitch）将这一思路推广到全角度范围，构造出了震惊数学界的贝西科维奇集[4]，完全解答了定长线段 360° 旋转的最小面积问题。

## 3.1 构造思路

贝西科维奇的核心思想是将 360° 的方向范围分解为多个小角度区间，每个区间对应一个佩龙树构造，再通过平移让这些佩龙树尽可能重叠：

（1）将单位圆等分为 $N$ 个扇形，每个扇形角度为 $2\pi/N$；

（2）对每个扇形，构造一个能容纳该角度范围内所有单位线段的佩龙树；

（3）平移所有佩龙树，使其顶点集中在一个很小的区域内；

（4）其总面积不超过 $N \times S_n$，当 $N$ 和 $n$ 足够大时，总面积可以任意小。

1931 年，贝西科维奇严格证明了：存在平面上的勒贝格可测集，包含所有方向的单位线段，但其面积可以任意小，甚至为 0[4]。这类集合被称为贝西科维奇集，也称为挂谷集（Kakeya set）。

## 3.2 测度性质

定义设 $B \subset R^n$ 是 Borel 集，若 $B$ 包含每个方向上的单位线段，则称 $B$ 为 $n$ 维挂谷集 .

定理（贝西科维奇，1928）：二维挂谷集的二维勒贝格测度可以为 0。

这一结论完全颠覆了几何直觉：一个包含所有方向单位线段的集合，其面积竟然可以和一个点一样小。但进一步的研究表明，挂谷集的豪斯多夫维数仍为 2，说明它在“厚度”上与整个平面等价[5]。

豪斯多夫维数是刻画分形集合维度的重要概念：对于自相似集合，若将其放大 $S$ 倍后得到 $N$ 个原集合的拷贝，则豪斯多夫维数 $d$=log$N$/log$s$。对于佩龙树，每次迭代后放大 2 倍得到 3 个拷贝，故其豪斯多夫维数为 log3/log2 ≈ 1.585，介于 1 维和 2 维之间。

# 4 挂谷猜想：连接几何与分析的桥梁

贝西科维奇的构造解决了平面挂谷集的面积问题，将其推广到更高维度时，产生了著名的挂谷猜想：

挂谷猜想 $R^n$ 中的任意挂谷集的豪斯多夫维数和闵可夫斯基维数均为 $n$。

## 4.1 与调和分析的联系

挂谷猜想并非孤立的几何问题，它与调和分析中的限制猜想有着深刻的等价关系。限制猜想由 Elias Stein 在 1967[6] 年提出，探讨傅里叶变换在低维流形上的限制性质：

限制猜想对于 $p > 2n/(n-1)$，傅里叶变换是 $L^p(R^n)$ 到 $L^q(S^{n-1})$ 的有界算子，其中 $q=p(n-1)/(n+1)$。

1971 年，菲尔兹奖得主 Charles Fefferman 证明了：若限制猜想成立，则挂谷猜想成立[7]。这一发现将几何问题转化为分析问题，推动了两个领域的共同发展。20 世纪 90 年代以来，陶哲轩（Terence Tao）等数学家发展了多线性估计方法，在高维挂谷猜想的研究中取得了重要进展。

## 4.2 三维挂谷猜想的重大突破

2025年2月，华人数学家王虹（Hong Wang）与合作者Joshua Zahl宣布证明了三维版本的挂谷猜想，成为近百年来该领域最重大的突破[8]。他们的证明采用了离散化的“管子模型”，将三维挂谷集分解为大量细长的管子，通过分析管子的重叠模式，严格证明了三维挂谷集的豪斯多夫维数必须为3。这一结果被陶哲轩评价为“几何测度论领域的里程碑式成果”[9]。

目前，四维及以上的挂谷猜想仍未解决，是21世纪数学界最重要的公开问题之一。

# 5 教学启示

从星形线的切线性质出发，到定长线段360° 旋转的面积最小化问题，再到挂谷猜想与前沿研究的整个探索过程，为微积分教学提供了极佳的案例：

（1）在知识衔接方面：从参数方程、导数、定积分等基础微积分知识出发，自然延伸到测度论、分形几何、调和分析等进阶内容，降低了高阶知识的学习门槛；

（2）在思维培养方面：通过“直觉－反例－推广－猜想”的路径，培养学生质疑直觉、严谨推导的数学思维，展现数学研究的典型范式；

（3）在前沿连接方面：将百年经典问题与2025年的最新突破相结合，让学生感受到基础数学研究的活力，激发探索兴趣。

**参考文献：**

[1] Yates, R. C. (1974). Curves and Their Properties [M]. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[2] Perron, O. (1928). Über einen Satz fon Besicovitsch [J]. Mathematische Zeitschrift, 28(1), 383–386.

[3] Falconer, K. J. (1986). The Geometry of Fractal Sets [M]. Cambridge University Press.

[4] Besicobitch, A. S. (1928). On the fundamental geometrical properties of linearly measurable plane sets of points [J]. Mathematische Annalen,98:422–464. https://doi.org/10.1007/BF01451603.

[5] Wolff, T. (1999). Recent work connected with the Kakeya problem [C]. In Prospects in mathematics (pp. 129–162). Providence, RI: American Mathematical Society.

[6] Stein, E. M. (1993). Harmonic Analysis: Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals [M]. Princeton: Princeton University Press.

[7] Fefferman, C. (1971). The multiplier problem for the ball [J]. Annals of Mathematics, 94(2), 330–336. https://doi.org/10.2307/1970864.

[8] Wang, H., Zahl, J. (2025). Volume estimates for unions of convex sets, and the Kakeya set conjecture in three dimensions [EB/OL]. arXiv preprint arXiv:2502.17655.

[9] Tao, T. (2025, February 25). The three-dimensional Kakeya conjecture, after Wang and Zahl[EB/OL].https://terrytao.wordpress.com/2025/02/25/the-three-dimensional-kakeya-conjecture-after-wang-and-zahl/.

基金项目：项目资助：高等学校大学数学教学研究与发展中心项目（CMC20240644）资助成果。

作者简介：吕川（1980-），男，汉族，四川省南充市，讲师，博士研究生，研究方向：密码学。