人工智能时代《数学分析》课程内容与能力培养体系的重构

张伏
上海理工大学，中国·上海 200093

摘要：大学数学基础课程应当教什么、内容怎样组织，因人工智能技术的推进而被重新追问。《数学分析》是数学类专业的主干基础课，它在训练抽象思维、严格推理与理论分析上的地位难以被替代；然而以往的教学安排中，理论与现代应用之间缺少紧密衔接，学生把所学知识迁移到新情境的能力也未得到充分训练。本文不打破数学分析原有的理论完整性与逻辑严谨性，而是讨论人工智能时代课程内容可以怎样重新组织：把批判判断、知识迁移、数学分析与基础理论四个层面结合起来，形成一套能力培养体系；使核心知识与能力目标之间、现代算法问题与课程内容之间分别建立对应关系；再以梯度下降过程中的函数下降分析、级数截断误差这两个案例，说明教学内容该如何编排，供数学分析课程改革参考。

关键词：数学分析；人工智能；课程改革；知识迁移；数学能力培养

Reconstruction of the Course Content and Competency Development Framework for Mathematical Analysis in the Era of Artificial Intelligence

Zhang Fu
University of Shanghai for Science and Technology, China Shanghai 200093

Abstract: What should be taught in foundational mathematics courses at the tertiary level, and how their content ought to be arranged, are questions that the advance of artificial intelligence (AI) is forcing us to answer anew. As a core course for mathematics majors, Mathematical Analysis remains irreplaceable in training rigorous reasoning, abstract thinking and theoretical analysis; in conventional practice, however, theoretical knowledge is rarely connected closely enough with modern applications, and students' capacity to transfer what they learn to unfamiliar settings is left underdeveloped. Without sacrificing the integrity or the logical rigor of its theoretical framework, this paper discusses how the course content of Mathematical Analysis might be reorganized for the AI era: a competency system is constructed that combines critical judgment, knowledge transfer, mathematical analysis and theoretical foundations; a correspondence is set up linking core knowledge, problems drawn from modern algorithms and competency objectives; and two cases, namely the analysis of how function values decrease under gradient descent, together with the estimation of truncation error for infinite series, are used to show how teaching content can be arranged. It is hoped that the discussion may serve curriculum reform in Mathematical Analysis as a usable reference.

Keywords: Mathematical analysis; Artificial intelligence; Curriculum reform; Knowledge transfer; Mathematical competency development

0 引言

科学研究的面貌与人才培养的路径，都在被人工智能技术改写。符号计算、数学推导这类工作，生成式 AI 已能承担一部分，基础数学课程因此须重新思考知识传授与能力养成的关系。课程教学变革以及高阶思维、判断能力的培养，在教育部等九部门《关于加快推进教育数字化的意见》中被明确强调[1]。

极限理论是《数学分析》的内核，连续、微分、积分与级数由此贯通，后续课程的理论基础在此铺就，严格表达与逻辑推理也在此磨炼。计算与证明可以借 AI 完成，但定理的假设是否成立、推理是否站得住，仍须学生自己判断。课程改革因此面临双重任务：理论严谨性不能放松，同时要让学生把握知识起什么作用、在什么范围内适用。

围绕数学分析课程改革，学界已从教学内容、教学方

表 1 数学分析核心知识与能力培养目标的映射

数学分析核心知识	现代应用问题	重点培养能力
数列极限与函数连续性	迭代算法收敛	极限分析与条件判断
导数与泰勒公式	梯度下降与函数下降	局部近似与误差估计
函数极值与凸性	最优化问题	数学建模与理论应用
Lipschitz 连续性	迭代映射与稳定性	收敛条件分析
无穷级数	折扣累积量与截断误差	收敛判别与误差控制
积分与极限运算	概率期望及近似计算	极限运算条件辨析

法与评价方式等角度作了讨论[2]，课程资源整合、分层培养的设想也被提出[3]。不过，核心理论怎样与现代算法问题对接，又怎样落成可以评价的能力目标，仍有讨论空间。

本文抓住“核心知识—应用问题—能力目标”三者的关系，给出课程内容与教学任务的重构方案，并用梯度下降中的函数下降分析、级数截断误差控制两个例子，交代方案如何落地。

1 人工智能时代数学分析课程的教学定位

严密的理论体系由《数学分析》的基本概念搭建而成：连续、导数、级数等知识都以极限为根基，定理的结论则要依附于明确的数学条件。熟练计算固然重要，但课程的要害不在此处，而在能否看清概念之间的关联、能否掌握证明的路数、能否判断一个结论在多大范围内成立。以导数为例，运算法则、局部变化率与函数近似三者都应在教学中顾及；讲到级数，收敛性之外还须讨论有限项近似的误差。计算结果 AI 可以给出，但上述理论依据是否成立，仍要学生自己分析。

能力培养可以分成四个彼此关联的维度。一是基础理论能力，落在理解定义、运用定理、完成证明上；二是数学分析能力，表现为识别假设、估计误差、判断结论；三是知识迁移能力，即拿课程中的理论去解释新问题；四是数学批判能力，指能发现条件不充分之处与推理不严谨之处。从理论理解出发，逐步通向迁移与批判，这条路径要求教学不能停留在套公式上，而要靠条件辨析、反例构造、应用解释来推动学生主动思考。

内容改革要守住三条原则。其一，极限、连续、微分、积分、级数构成的理论体系必须保持完整；其二，所选应用问题要与知识点直接相关，且能把数学条件的意义显示出来；其三，案例难度、课时投入都要有所节制，别让数学分析课上成算法课。

2 数学分析课程内容与能力培养体系的重构

2.1 建立核心知识、现代应用与能力目标的映射关系

数值计算、优化理论、机器学习以及时间序列分析等方向，都能见到数学分析的身影。把这类问题适度引入课堂，学生更容易看清基础理论同现代数学方法如何衔接。表 1 按核心知识、相关问题与培养能力三个栏位，把对应关系列了出来。

做这张映射表，目的不在系统讲授算法，而是借梯度下降、折扣累积这类情境，把泰勒估计与级数误差控制到底起什么作用讲清楚。表中其余关联留作内容拓展即可，没有必要每条都做成独立案例。

2.2 构建递进式课程内容结构

知识理解与能力发展之间存在先后，据此可把部分教学内容编成三个逐级递进的层次。最底层是核心理论学习，基本概念、定理、证明与典型计算方法构成其重点，知识体系的系统与严谨由此得到保证。往上是理论深化学习，数学条件的辨析、反例的构造、误差的估计以及不同知识点之间的关联是这一层的重点。比如学完连续性，再把连续与一致连续放在一起比较，量词顺序、条件强弱如何影响数学结论便能体会出来。最高一层是现代应用分析，载体是经过适当简化的算法问题，学生用已掌握的理论去解释具体的数学现象。三个层次层层推进，递进关系由此显现，即“理论学习—条件分析—知识迁移”；核心理论自始至终是课程主体，现代应用则担负促进理解、拓展思维的功能。

2.3 从知识映射到教学任务的转化机制

映射要真正起作用，就得落到可观察、可评价的学习任务上。路径是：选定知识点，确定能力目标，设计问题情境、组织学习活动，最后评价成果；抽象目标由此变成一项项具体任务。

第一步，依课程知识结构定出需要强化的核心能力。以导数与泰勒公式为例，计算方法当然要会，但更要紧的是让学生能分析函数的局部变化、能估计误差。第二步，挑出足以承载这些能力的数学问题，把抽象知识转成具体的分析任务。梯度下降便可如此处理：只要求他们分析步长同函数下降之间是什么关系，完整的优化算法不必涉及。

第三步，围绕这些问题安排逐级加深的学习活动。基础任务看的是定义是否理解、定理能否运用；深化任务转向条件辨析、证明推导与反例分析；拓展任务则要求学生

用已有理论去解释现代应用中的问题。第四步，用与能力目标相配的评价任务测查理解程度，重心放在条件判断、推理过程与知识迁移上，计算结果不再是唯一依据。

Lipschitz 条件的教学可以照此设计成三级任务：先弄清 Lipschitz 连续性相对于普通连续性的特殊之处；再借压缩条件证明迭代序列收敛；最后用反例考察压缩系数条件一旦松动，收敛结论会受到什么影响。概念理解、严格推理、数学批判三种能力分别与这三项任务对应，教学内容与能力培养之间就有了清晰的连接。经由这样的转化，应用情境成了加深理论理解的凭借，而非额外增添的负担。

2.4 教学评价的设计原则

目标对齐、过程可观察、难度递进，是评价应当守住的三个原则[4]。理论能力由定义与证明来体现，分析能力由条件与反例来体现，迁移能力由简化应用来体现，批判能力则由推理核验来体现。评分标准不能只盯答案，假设如何陈述、论证是否合乎逻辑、结果作何解释，都须有所反映。反馈可由人工智能辅助生成，评价依据则要经教师审核[5]。

3 课程内容重构的典型教学案例

为了让上述思路具体可感，这里挑出两个知识模块——导数与泰勒公式、无穷级数，各配一个案例：前者做梯度下降中的函数下降分析，后者做折扣累积量的截断误差分析。两例都以数学分析理论为骨架，现代应用只是承载理论分析的容器。

3.1 导数与泰勒公式：梯度下降中的函数下降分析

在数学分析中，导数与泰勒公式占着重要位置。学生对函数局部近似的理解若要加深，梯度下降算法里的函数下降问题是个合适的切入点。设一元函数 f 可微，且 f' 具有 Lipschitz 条件

$$|f'(x)-f'(y)| \le L|x-y|,$$

则由微积分基本定理可得

$$f(y) \le f(x)+f'(x)(y-x)+(L/2)(y-x)^2。$$

考虑梯度下降迭代 $x_{k+1}=x_k-\eta f'(x_k)$，其中 $\eta>0$ 为步长。代入上述不等式，得到

$$f(x_{k+1}) \le f(x_k)-\eta(1-L\eta/2)|f'(x_k)|^2。$$

于是，只要 $0<\eta<2/L$ 成立，函数值便不会增大。课堂上可先让学生用泰勒公式估计函数的变化，再讨论一件事：沿负梯度方向移动，是否一定使函数值变小？由此进一步分析步长限制与光滑性条件各自起什么作用。本案例的着眼点不在讲授优化算法，而在于借助现代应用说清导数、局部近似与误差估计的数学含义，并帮助学生把函数值下降、迭代收敛、全局最优这几个不同结论区分开来。

3.2 无穷级数与截断误差：从数学理论到折扣累积量

讲到无穷级数，收敛判别固然要研究，有限项近似及其误差估计同样不能放过。考虑折扣累积量

$$S=\sum_k \rho^k a_k，\ 0<\rho<1，\ |a_k| \le M。$$

根据几何级数收敛性可知，该级数绝对收敛。若以前 N+1 项 S_N 进行近似，则有

$$|S-S_N| \le M\rho^{N+1}/(1-\rho)。$$

有了这个不等式，有限项近似的误差上界便确定下来，据此还能反推：要达到给定精度，截断项数该取多少。时间序列里的衰减权重、强化学习中的折扣累计量，与这一数学结构相通。课堂上用简化的有界数列即可讲清级数的收敛性、有限近似与误差控制，无须把随机过程、强化学习的完整理论搬进课堂。两个案例各有侧重，一为局部变化的估计，一为无穷累积的误差控制；它们都从现代问题切入，最后仍回到数学定义、定理条件与严格推理上来。

4 课程改革的实施路径与评价设计

重构后的内容要嵌进现有教学体系，而不是另起炉灶、增设大量独立的算法教学，流程上取“问题引入—理论分析—条件辨析—应用反思”这条简明线索即可。应用问题是为核心概念与定理的学习服务的，基本推导面向全体学生，条件讨论中较复杂的部分留作拓展任务，系统的算法课程不必另设。

评价既要看理论掌握得如何，也要看数学能力发展到什么程度。计算与证明的训练仍须保留，在此之上适当加入条件分析、反例辨析、应用解释一类任务。比如梯度下降案例，可让学生说明步长限制同函数下降之间是什么关系。还可适度安排推导核验任务，让人工智能生成的证明接受学生的检验——看它有没有漏掉条件、有没有逻辑错误。这样设计评价，为的是把学生的注意力从结论引向推理依据、条件适用性与结果可靠性。

重构须有分寸，不能让数学分析的教学内容无度膨胀。算法背景要求较高的案例，要经过合理简化，使数学分析知识始终居于核心。人工智能的辅助作用也该被正确看待：联合国教科文组织就生成式人工智能的教育应用所发布的指导文件主张技术应用以人为本，看重教育价值与人的主体性[6]。变式问题的生成、计算的辅助、推导的核验，这些工作在数学分析教学中都可以交给 AI；独立分析与严格证明，却必须由学生自己完成。

5 结语

严格的理论训练不能丢，在此基础上，人工智能时代的数学分析改革还要着力强化知识之间的联系、条件的判断以及迁移能力。本文给出的框架把“核心知识—应用问题—能力目标”三者对应起来，并配以分层任务设计；梯度下降与级数截断误差两个案例，则用来说明具体怎么实施。方案的用意是让现代问题服务于数学理解，而不是拿算法教学取代数学分析。至于实际教学效果如何，尚待后续课堂实践检验。

参考文献：

[1] 教育部等九部门. 教育部等九部门关于加快推进教育数字化的意见[EB/OL]. (2025-04-15)[2026-10-20]. https://www.moe.gov.cn/srcsite/A01/s7048/202504/t20250416_1187476.html.

[2] 马冠忠. 师范院校《数学分析》课程教学存在的问题与对策[J]. 教育理论与实践 , 2022, 42(24): 58-61. https://jyll.cbpt.cnki.net/portal/journal/portal/client/paper/8e5ee886a95655b508114146a671ece1.

[3] 孙菊贺，王莉.“四位一体，逐层培养”的《数学分析》课程教学改革与实践[J]. 教育进展，2023, 13(1): 197-202. DOI:10.12677/ae.2023.131031.

[4] BIGGS J. Enhancing teaching through constructive alignment[J]. Higher Education, 1996, 32(3): 347-364. DOI:10.1007/BF00138871.

[5] ZAWACKI-RICHTER O, MARÍN V I, BOND M, et al. Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education – where are the educators?[J]. International Journal of Educational Technology in Higher Education, 2019, 16: 39. DOI:10.1186/s41239-019-0171-0.

[6] MIAO F, HOLMES W. Guidance for generative AI in education and research[R/OL]. Paris: UNESCO, 2023[2026-10-20]. https://www.unesco.org/en/articles/guidance-generative-ai-education-and-research.

基金项目：本论文受到上海理工大学 2026 年度教师发展研究项目资助。

作者简介：张伏（1982.11-），男，汉族，江苏省睢宁县人，博士学历，副教授，研究方向：随机分析与控制。