现代数学和 python 实现藏族传统天文历算中的“沙盘算法”

宁晓荷 边巴 巴桑卓玛

西藏大学理学院，中国 ·西藏 拉萨 850000

摘要：“沙盘算法”是贯穿藏族天文历算整体的计算方法，其独特的运算规则在世界历法系统中独树一帜，通过研读相关书籍，文中对“沙盘算法”的基础运算逻辑使用现代数学计算方法总结描述，包括数与数之间、向量与向量之间的“四则运算”、动态进位制计算等计算方法，使用 Python 实现动态进位制的计算、月球位置计算和闰月的预测，并给出了天文历算中几个常用计算的示例。

关键词：藏族传统天文历算；“沙盘算法”；Python；现代数学

Modern mathematics and Python implementation of the "sand table Algorithm" in traditional Tibetan astronomy and calendar calculation

Ning Xiaohe, Bian Ba, Basang Zhuoma

College of Science, Tibet University, China Xizang Lhasa 850000

Abstract: The "Sand table Algorithm" is a calculation method that runs through the entire Tibetan astronomical calendar system. Its unique operation rules are distinctive in the world calendar system. Through the study of relevant books, this article summarizes and describes the basic operation logic of the "Sand table Algorithm" using modern mathematical calculation methods, including the "four arithmetic operations" between numbers and vectors, dynamic carry system calculation and other calculation methods. The calculation of dynamic base system , the positive of moon and the prediction of leap months are realized by using Python, and several examples of commonly used calculations in astronomical calendar calculation are given.

Keywords: Tibetan traditional astronomy and calendar calculation; "Sand table algorithm"; Python; Modern mathematics

0 引言

藏族天文历算是藏族人民通过学习中国古代、印度等邻国的先进历算方法、数学思想、天文知识等，结合本土自然地理条件、气候条件和人们生产生活方式总结出的一门学科。由此历算推演出来的一系列结果对藏族人民的生产生活起到了至关重要的指导作用。其中，藏族人民日常使用的藏历便是天文历算的重要计算成果之一。“沙盘算法”①是藏族天文历算的重要计算手段，是一种由加减乘除组成的“四则运算”。与通俗的四则运算不同的是，在进行乘法、除法和减法运算时，是从左至右计算，也就是从最高数位开始计算，依次至最低数位。然而，由于“沙盘算法”计算过程的特殊性，一旦计算错误就要从头开始重新计算，并且他是一个手动计算的过程，极易出错且耗时量巨大。

关于藏历中时间和空间的对应运算和解释已有学者进行研究，黄明信与陈久金老师将《藏历的原理与实践》一书翻译为中文版本，对初步入门藏族天文历算打下基础；纽约哥伦比亚大学美国佛教研究中心和美国西藏之家联合出版的 Treasury of the Buddhist Sciences 系列丛书中包含了藏族文历算的计算说明[1]，但书中更注重结合物理学知识，其在数学方面的计算仍旧使用最基础的“四则运算”；瑞典著名数学家 Janson.S 从数学角度对藏族天文历算中闰月的计算过程中的时间与空间的耦合做出了研究[2]，但对于计算基础“沙盘算法”未作出具体的说明。

综上所述，本文将针对性的对计算过程和计算速度两个问题进行优化解决。主要使用的工具为 Python，在保留原有计算逻辑的基础上，能够更清晰地展示计算过程，并且提高计算速度。同时，将对计算结果与实际的观测结果

①“沙盘算法”是藏族传统数学的重要计算手段，专业性强，且学习方式为口口相传，传播性有限。

（主要参考 Python 的 Astroy 库中 1927 年到 2025 年的月球黄经）对比分析。

1 沙盘算法

1.1 基础知识

藏族天文历算中计算日期、日月位置等需要精确对应到既定的十二宫、二十七星宿①的具体位置，由于十二宫和二十七星宿是循环往复的，这就需要用到同余思想，去确定每个时刻所在的具体位置；以及取整计算去确定经过了多少次循环。因此同余计算、求整计算是"沙盘算法"的核心数学思想的体现。藏族"沙盘算法"是由加减乘除四种运算组成，丹玉通常使用的四则运算不完全相同。加法从右至左依次进行十进制运算，而减法、乘法和除法则是从左至右依次进行十进制运算。首先对于减法，减数写在被减数下方，减数最低位与被减数最高位对齐，从左至右逐位移动减数进行计算；其次对于乘法，每计算一位所得结果按照十进制加法与原位置数字相加，并替换原位置上的数字，以此类推从最高数位计算至最低数位；最后，除法又分为单位数除和多位数除，计算方法与乘法类似，从最高位起第一次能够大于除数时开始计算，商写在上方，原位置减去除数与商的乘积，以此类推，每次将除数向右移动一位，直到原被除数位置的值小于除数，得到最上方的一行为商，中间一行为余数，最下一行为除数。然而在藏族天文历算中除去对两个数的运算，还要对一些数组进行运算。因此，同样采用上述计算原理 - 从最高位开始计算，取余数作为计算结果，依次进行至最小单位"子"。一般情况计算到子位时，是可以被 67 或者 707 整除②的。

1.2 计算原理

将历算中出现的数组记作是一维的向量，那么，对两个 1 × n 的向量 $a_1 = (a_{11}, a_{12},..., a_{1n})$ 和 $a_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$，以基为 $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ 进行加法计算。首先从左至右对两组数的第个数做加法，若 $a_{1i}+a_{2i}+_{di} > b_i$，（di 是第 i+1 位做取整运算所得的整数部分）那么使用取整和同余函数分别计算 $a_{1i} + a_{2i} + d_i$ 除 b_i 的整数部分和余数部分。将整数部分加在第 i−1 位，记作 $d_{i−1}$，余数部分写在第 i 位，记作 x_i。以此类推将已经进行过加法运算的划掉，将得到的所有余数组成的列向量就是最终的结果。当计算的是最后一位（这是指的是 a_{1n} 和 a_{2n}）那么对应的 i + 1 不存在，则对应的 di = 0；当计算的是第一位（这是指的是 a_{11} 和 a_{21}），那么对应的 i−1 不存在，则将对应的 d_i 舍去即可 *。接下来我们讨论了实数与一维数列的加减乘除、数列与数列的乘除运算。

对上述向量 a_1 与实数 A（A 是代表实际意义的一个数，例如，A 漏刻）所以为 $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ 基做四则运算，同样，从左至右做加法运算。现在假设 A 与 a_{11} 的单位相同。那么直接将 A 与 a_{11} 相加，做同余计算得到 x_1，那么 A 与 a_1 做加法得到的结果为 $[x_1, a_{12}, ..., a_{1n}]$，若 A 与 a_{12} 的单位相同，那么将 A 与 a_{12} 相加，从左至右分别做取整和同余计算即可。换句话说，我们可以将实数 A 看作是向量 [0, A, 0, ..., 0]，对于两向量之间的加法在上文中已给出计算过程，此处不再赘述。对于乘法运算从上至下做乘法运算：$(a_{1i} + d_i) \times A = a_i$. 若 $a_i > b_i$，则使用取整和取余函数分别计算 a_{1i}/b_i 的整数和余数部分，将整数部分 d_i③加在第 i−1 位上，余数 x_i 为第 i 位的结果，以此类推将已经进行过加法和乘法的划掉，余数组成的向量即为最终的结果。

最后讨论向量与向量的乘法。由于在藏族天文历算中每一个向量的相邻两位之间存在一定的数量关系，且表达的实际意义不同，因此不能像一般的向量的运算那样直接做乘法运算。若将这样一个特殊的向量能够转化成一个实数，这样就可运用实数的加减乘除去运算。因此，定义一个运算：

$$x = a_1 + \frac{1}{b_1}\left(\frac{a_2}{b_2} + \dots + \frac{a_n}{b_2 b_3 \dots b_n}\right) = a_1 + \frac{1}{b_1}\sum_{i=2}^{n}\frac{a_i}{\prod_{j=2}^{i} b_j}$$

其中 $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ 是以 $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ 为基的向量。从而使得向量 a 与实数 x 一一对应，并且 x 代表的实际意义是和 a_1 单位相同的一个量。因此得到向量 a_1 和 a_2 对应的实数为：

$$||a_1|| = x_{11} + \frac{1}{b_1}\sum_{i=2}^{n}\frac{x_{1i}}{\prod_{j=2}^{i} c_j}$$

$$||a_2|| = x_{21} + \frac{1}{b_1}\sum_{i=2}^{n}\frac{x_{2i}}{\prod_{j=2}^{i} c_j}$$

①有时也说二十八星宿，由于牛宿和女宿共占轨道比例为 1/27，因此在时轮历中将其记作一个星宿，故也称为二十七星宿。

②在藏族天文历算中，通常是五位的数组与实数进行计算，将数组的第五位（最小的单位）被翻译为"子"，然而在具体的运算过程中，也会出现六位的数组运算，这时将第五位和第六位都叫做子位，为了区分按顺序称作第五子位和第六子位 . 这里所说子位对应的进位制通常有 67 和 707 两种。

③ d_i 指的是循环的周数，若计算的是时间参数，则对应的是经过 d_i 周，若计算的空间参数，则对应的是已过 d_i 周天。

其中，||a1|| 和 ||a2|| 的单位是昼夜或者宿，进而使用“沙盘算法”进行计算。

2 “沙盘算法”实例应用

例一：使用“沙盘算法”原理对进行四则运算。

加法：

345 → 346 → 356
11　　1

数字 345 和 11 做加法的结果为 356. 计算过程中加粗部分为每一步的计算结果，是原数字做出变化的部分，下面所有的加粗数字与此表达相同。

减法：

345 → 335 → 334
11　　1

数字 345 和 11 做减法的结果为 334.

乘法：

345 11	→	3345 11	→	3345 11	→	3745 11	→	3745 11	→	3795

数字 345 和 11 做乘法的结果为 3795.

除法：

345 → 3 → 3 → 31
11　15　15　4
　　11　11　11

数字 345 和 11 做除法的商为 31, 余数为 4。[3]①

对 345 与 11 做乘法，记“345”为被乘数，“11”为乘数。首先，将 11 的最低数位与 345 的最高数位上下对齐，第一步，让“11”与 345 的百位上的“3”做乘法得到 33 替换原百位上的“3”，写成“33”。第二步，将“11”向右移动一个数位使得个位上的“1”与被乘数十位上的“4”，做 4 与 11 的乘法得到乘积为 44，乘积的个位替换原被乘数的个位，十位与被乘数的百位相加得“7”。第三步，将“11”继续向右移动一个数位，使得各位上的“1”与被乘数个位“5”对齐，做“11”与 5”的乘法得乘积为 55，将此乘积的个位替换原被乘数的个位，十位与被乘数的十位相加的“9”，从而得到 11 与 345 做乘法的结果为 3795. 上述为“沙盘算法”对两个数字的具体计算过程，接下来对于本文中的向量来说，“沙盘算法”的 具体运算过程如下例题所示。

例二：a1 = [0, 45, 55, 0, 240], a2 = [4, 47, 6, 3, 687], 以 b = [7, 60, 60, 6, 707]（单位是：昼夜②，漏刻，漏分，息，子）做加法与运算。

$f(240 + 687, 707) = 1; g(240 + 687, 707) = 220$

$f(0 + 3 + 1, 6) = 0; g(0 + 3 + 1, 6) = 4$

$f(55 + 6 + 0, 60) = 1; g(55 + 6 + 0, 60) = 1$

$f(45 + 447 + 1, 60) = 1; g(45 + 47 + 1, 60) = 33$

$f(0 + 4 + 1, 7) = 0; g(0 + 4 + 1, 7) = 5$

使用“沙盘算法”表示如表一所示。

表1 动态进位制加法计算

a_{1i}	a_{2i}	d_i	x_i
0	4	1	5
45	47	1	33
55	6	0	1
0	3	1	4
240	687	0	220

注：其中加粗黑体是计算划掉的数字

因此，a_1 和 a_2 做加法运算的结果为 [5, 33, 1, 4, 220]. 即 0 昼夜 45 漏刻 55 漏分 0 息 240 子与 4 昼夜 47 漏刻 6 漏分 3 息 687 子做加法得到的时间和为 5 昼夜 33 漏刻 1 漏分 4 息 220 子。根据 1 昼夜 =24 小时、1 漏刻 =24 分钟 *、换算得到 a_1 对应的时间长度为 18 小时 22 分钟 1.3622 秒（1102.0227 分钟 =18.3671 小时），a_2 对应的时间长度为 4 天 18 小时 50 分钟 39.8884 秒（6890.6648 分钟 =114.8444 小时），(5, 33, 1, 4, 220) 对应的时间长度为 5 天 13 小时 12 分钟 41.0824 秒（7992.6874 分钟 =133.2115 小时）发现两者计算结果基本相同。因此将藏历中对时间维度的计算时较为准确的。

例三：a = [2, 10, 58, 1, 17], A = 1885，以基为 [27, 60, 60, 6, 67]（单位是：周天，弧刻弧分，弧息，子）做乘法运算。

$f(17 \times 1885, 67) = 478; g(17 \times 1885, 67) = 19$

$f(1 \times 1885 + 478, 6) = 393; g(1 \times 1885 + 478, 6) = 5$

$f(58 \times 1885 + 393, 60) = 1828; g(58 \times 1885+393,60) =43$

$f(10 \times 1885 + 1828, 60)=344; g(10 \times 1885+1828,60) =38$

$f(2 \times 1885 + 344, 27) = 152; g(2 \times 1885 + 344, 27) = 10$

使用“沙盘算法”表示如表二所示。

表2 动态进位制乘法计算

a_i	A	d_i	x_i
	1885	152	
2	1885	344	10
10	1885	1828	38
58	1885	393	43
1	1885	478	5
17	1885	0	19

注：其中加粗黑体是计算划掉的数字

因此 a 与实数 A 做乘法的结果为 [100, 38, 43, 5, 19]。

①例一所使用的运算表达形式参考 [3] 一书中对中国古代孙子算法的运算表达形式。

②此处一昼夜说的是藏族天文历算中的一个太阳日的长度，将一个太阳日与水世界时间的 24 小时制对应，计算出的数量关系，即 1 昼夜 =24 小时、1 漏刻 =24 分钟、1 漏分 =24 秒、1 息 =4 秒。

例四：a = [2, 10, 58, 1, 17], A = 1885 弧息，以基为 [27, 60, 60, 6, 67]（单位是：周天，弧刻弧分，弧息，子）做加法运算。

法一：

d=[d−1, d2, d3, d4, d5]=[0,0,0,0,0]

x=[x1, x2, x3, x4, x5]=[2,100,58,1,17]

||a|| = 2.18283 = 47149.02405

与 A 做加法的结果为：||a|| + A = 47149.02405 + 1885 = 49034.02405。

法二：A 可以写成 a_0 = [0, 0, 0, 0, 1885, 0], 那么 a 与 A 做加法可以看作是 A 与 a_0 做加法运算，得到的结果为 [2, 10, 58, 1886, 17] = [2, 16, 12, 2, 17]。

以上两种方法均可计算的正确结果，冰企鹅额这两个结果是一一对应的，即 [2, 16, 12, 2, 17](27, 60, 60, 6, 67) = 49034.02405①

3 python 实现

3.1 模型实现

认识了“沙盘算法”的具体运算过程后，在现代数学软件中实现“沙盘算法”的运算也是至关重要的。本文将使用 python 对“沙盘算法”的计算原理进行建模实验，并通过已有数据调整模型，使其能够运用在藏族天文历算的计算中。首先，由于“沙盘算法”中减法、乘法和除法运算的特殊性，需要重新在 python 中定义四则运算，以便于后期对本文所说的向量进行计算。本文将参考《藏历的原理与实践》一书中天文历算的计算过程，以 1827 年 3 月 1 日为历元②，计算 1927 年至 2025 年的月球在黄道上的位置。

首先做出两个假设：

（1）月球在黄道上位置的黄纬与观测的实际值相同；

（2）忽略一天之内的黄经变化，仅考虑以天的单位的月球黄经变化。

首先根据建立的月球位置计算模型计算得到每一天的月球位置（黄经）。利用模型计算了从 1927 年至 2025 年间闰月的发生情况如图一所在 Python 中的 astroy 库中使用 de421 星历表中月球数据进行简单的误差分析。对比结果如图一所示。可以看到如果按照年月日参考对比，误差呈现周期性的变化，并且误差较大。

其次我们利用此模型计算从 1827 年至 2027 所得数据去预测闰月的发生与实际的闰月对比的结果如图二、图三所示。观察两个图形可以得到闰月的发生呈现一定的规律，并且对闰月的预测仅有两处不一致。从 1827 年起第一次出现闰月是在 1929 年的 6 月，经过 24 个闰月后，第 25 个闰月出现在 1894 年的 6 月，中间刚好相差 65 年，此后每 65 次折线图次重复一次。这与 65 置 2 闰[4]③是一致的。

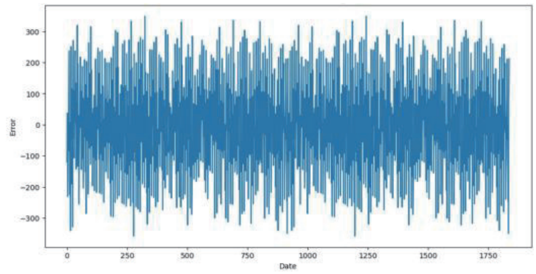
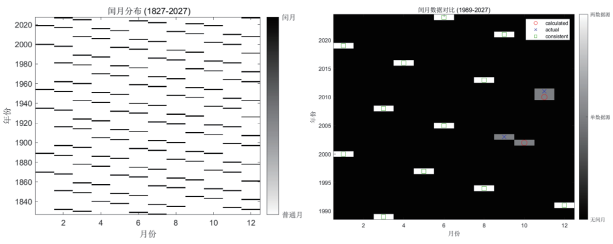


图 1：图一



(a) 图二　　(b) 图三

图 2 闰月预测示意图

3.2 误差分析

从 4.1 的结果来看，藏族传统天文历算对月球的黄经预测的准确性很差 . 从计算模型的角度来看主要误差体现在以下几个方面：

（1）藏族天文历算在计算黄经时，是以数组的形式进行计算，因此最后转化为实数的过程中由于精确度会社区一部分的值，造成误差。

（2）计算过程中使用的初值是直接使用[5] 书中的值，这些值由于藏族天文历算自身的模型缺陷，本身存在一定的误差。

（3）计算过程中使用的日期是藏历，他与农历有些相似，但其中存在重日和缺日导致最终计算某一天月球的位置，将时间转化为公历后存在一定的偏差，使得月球的黄

① [2, 16, 12, 2, 17](27, 60, 60, 6, 67) 表示的是向量 [2, 16, 12, 2, 17] 在 (27, 60, 60, 6, 67) 的动态进位制下进行范数计算的结果。此表达形式是参考 [1] 中的表达形式。

②历元是藏族纪年的一种特殊表达方式，将十二生肖和五行阴阳结合，以六十为一周期，每周期的第一年叫做此周期的历元。

③ 65 置 2 闰是藏历中设置闰月的一种计算方法，也就是说每 65 个月中会出现两个闰月，因此每 65 年会出现 24 个闰月。

经误差较大。

（4）藏族天文历算中计算得月球位置是某一太阴日 * 结束时刻对应的月球的位置，而使用 de421 星历表提取的时间与之不尽相同，导致计算结果有误差 . 针对以上问题，后续工作将对藏族传统天文历算模型进行优化，使其计算的准确性更高，计算结果更可靠。

（5）模型中在计算月球超行的弧度时，对应使用的“月离步度表”和“日躔步度表”中超行的弧度是根据正弦函数进行估计的，估计过程中进行了舍入，因此对超行的量不够准确。

4 结语

本文从基础的数学思想出发，结合现代数学理论和 Python，对藏族天文历算中的“沙盘算法”进行了详细的总结分析和应用。通过分析可以看出“沙盘算法”不仅体现了古代藏族人民的智慧，还蕴含了许多现代数学思想，如一一对应关系、带余除法、辗转相除法、同余函数等。这些数学思想的应用使得“沙盘算法”在计算过程中既方便又精准，成为藏族天文历算中不可或缺的工具。“沙盘算法”在藏族人民的生产生活中发挥了重要作用，尤其是在预测气候变化、季节更替以及藏医药的发展等方面。它不仅帮助人们更好地理解自然规律，还为藏族文化的传承和发展提供了科学依据。通过对“沙盘算法”的深入研究，我们可以更好地了解古代藏族人民的生活方式、思维习惯以及他们对自然现象的观察和理解。然而，值得注意的是，“沙盘算法”在历史上主要通过口口相传的方式进行学习和传承。这种传统的传承方式虽然在一定程度上保留了算法的原始形态，但也限制了它的传播范围和影响力。为了让更多人了解并掌握这一古老而精妙的算法，未来有必要推进多个系统性的参考著作与研究成果，对其理论体系进行深入梳理与科学建构，并借助现代科学手段加以推广。希望未来能有更多的学者和研究者关注藏族天文历算，让这一古老的智慧结晶能够被更多人看到、学习和应用。“沙盘算法”不仅是古代藏族人民的智慧结晶，也是中华民族文化遗产的重要组成部分。我们应当珍惜这一宝贵的文化遗产，不断学习、探索并传承下去，让它在现代社会中焕发出新的生命力。

参考文献：

[1] Edward Henning. K ā lacakra and the Tibetan calendar. American Institution of Buddhist Studies, 2007.

[2] Svante Janson. Tibetan calendar mathematics. arXiv preprint arXiv:1401.6285, 2014.

[3] Lay Yong Lam. The development of hindu-arabic and traditional chinese arithmetic.

[4] East Asian Science Technology Medicine, (13), 1996.

[5] 黄明信 . 西藏的天文历算 . 西藏的天文历算，2002.

[6] 黄明信，陈久金 . 藏历的原理与实践 . 1987.

基金项目：国家自然科学基金（12526309）。

作者简介：宁晓荷（1999.11-），女，汉族，河南省三门峡市湖滨区，硕士研究生，研究方向：藏族传统天文历算。