

# S-C变换在露天矿电法勘探地形影响分析中的应用

张云松 赵化君

内蒙古科技大学 矿业与煤炭学院 内蒙古包头 014010

**摘要:** 露天金属矿台阶上布置测线时, 虽然测线是水平的, 但其垂直方向的地形却呈台阶状。在这种情况下, 地形对电场的影响不容忽视。Schwarz-Christoffel变换解决问题的基本思想是通过变换解析函数, 将复平面 $Z$ 上具有复杂边界形状的边值问题变换为 $W$ 平面上具有简单形状的边值问题, 在 $W$ 平面上通常会比较容易求解, 然后再通过逆变换从而求得原始问题的解。此章节将利用 Schwarz-Christoffel变换模拟出单电极在不同地形下的电流线与等压线的分布, 从电流线与等压线的角度去解释高密度电法勘探在露天矿台阶地形中受到的地形影响。

**关键词:** 高密度电法勘探; 数值模拟; 台阶地形

## The application of S-C transform in the analysis of topographic effects of open pit electrical prospecting

Yunsong Zhang, Huajun Zhao

College of Mining and Coal, Inner Mongolia University of Science and Technology, Baotou 014010, Inner Mongolia

**Abstract:** When laying survey lines on terraced surfaces in open-pit metal ore mines, the survey lines may be horizontally level, but the terrain exhibits a stepped configuration in the vertical direction. In such cases, the impact of the terrain on the electric field cannot be ignored. The fundamental idea behind the Schwarz-Christoffel transformation for problem-solving is to transform boundary value problems with complex boundary shapes on the complex plane  $Z$  into boundary value problems on the  $W$ -plane with simpler shapes by means of transforming analytic functions. The problems are often easier to solve in the  $W$ -plane, and then the original problem's solution is obtained through inverse transformation. This chapter will employ the Schwarz-Christoffel transformation to simulate the distribution of current lines and equipotential lines for a single electrode under different terrains. It aims to explain the impact of terrain on high-density electrical exploration in open-pit mining with terraced topography, viewed from the perspective of current lines and equipotential lines.

**Keywords:** High-Density Electrical Exploration; Numerical Simulation; Step Relief

### 引言:

保角变换 (conformal transformation) 是指在一个区域内的复函数的导数不为零的情况下, 将一个复平面映射到另一个复平面的变换, 使得在映射后的平面中, 保持原来两点间的角度大小不变。换句话说, 它保留了原始平面上两条曲线之间的夹角。保角变换在解决电场问题中的应用, 通常涉及到使用某些特殊的保角变换 (如 Schwarz-Christoffel 变换) 将原本复杂的电场形式

转化为更简单的形式, 从而更容易求解电场的性质。S Natarajan, S Bordas 提出了一种新的数值积分技术, 适用于任意多边形域。通过使用 Schwarz-Christoffel 映射, 将多边形域共形地映射到单位圆盘上, 并在此单位圆盘上定义一个中点求积法则。这种方法消除了通常所需的两级等参映射。此外, 雅可比行列式的正值得到了保证。在多边形有限元问题背景下, 针对一些基准问题的数值结果表明, 该方法能够产生准确的结果。Trefethen L N 描述了一个计算 Schwarz-Christoffel 变换的程序, 该变换将单位盘保形地映射到复平面内有界或无界的多边形的内部。还计算了反映射。计算问题是通过建立一个非线性方程组来解决的, 其未知数基本上是“附属参数” $z_k$ 。

**作者简介:** 张云松 (1997-), 男, 内蒙古科技大学安全工程专业在读硕士研究生, 主要研究方向为露天矿边坡灾害源探测等。

然后用一个打包的子程序来解决这个系统<sup>[1]</sup>。O'Connell T C介绍了一种利用Schwarz-Christoffel变换并通过S-C工具箱软件包实现的电机的分析场分析方法。通过该方法,分析了带有线性磁性材料的一般二维电机截面。然后利用叠加法对该方法进行扩展,以分析时域中的绕线转子感应机<sup>[2]</sup>。Driscoll T A使用MATLAB的施瓦兹-克里斯托弗工具箱是施瓦兹-克里斯托弗公式的一个新实现,用于从圆盘、半平面、条形和矩形域到多边形内部的映射,以及从圆盘到多边形外部的映射<sup>[3]</sup>。最新发布的本支持新的功能,包括面向对象的命令行界面模型,用于多重拉长和多片区域的新算法,以及用于解决多边形上具有Dirichlet和同质Neumann条件的Laplace方程的模块。简要的例子说明了新的能力<sup>[4]</sup>, Davis R T阐述了拥挤现象使得圆盘或半平面到细长区域的共形映射数值计算具有挑战性。为解决这个问题,文章提出了使用无限条带作为标准域的方法<sup>[5]</sup>。本文提出了一种新的数值积分技术,适用于任意多边形区域。Natarajan S通过使用Schwarz-Christoffel映射将多边形区域共形地映射到单位圆盘,并在单位圆盘上应用中点求积公式。本文以针对露天矿台阶地形对高密度电法勘探的截面电流密度以及其对反演结果的影响等关键问题,采用数值模拟法,开展露天矿台阶地形对高密度电法勘探的影响研究。

## 一、数值模拟的基本理论

### 1. Schwarz-Christoffel变换基本理论

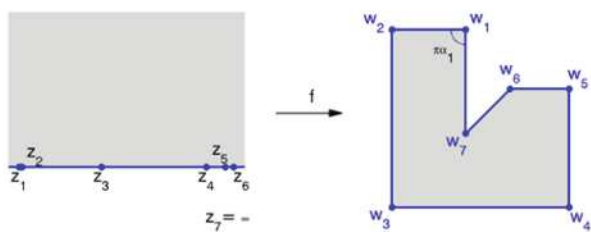


图1 S-C变换示意图

Schwarz-Christoffel公式是一种由复平面上半平面(规范域)到多边形(物理域)内部的共形映射f的方法。该“polygon”可以在无穷远处存在裂缝或顶点。它的顶点用 $w_1, \dots, w_n$ 表示,角度 $\alpha_1\pi, \dots, \alpha_n\pi$ 表示它们在顶点处的内角。原像点或者称为原顶点用 $z_1, \dots, z_n$ 表示他们满足:

$$z_1 < z_2 < \dots < z_n = \infty$$

如果顶点 $w_j$ 是有限的,  $0 < \alpha_j \leq 2$ 。如果顶点 $w_j$ 是无穷大的,  $-2 \leq \alpha_j < 0$ , 则有一个必要约束:

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j = n - 2$$

意味着多边形的内角之和等于 $2\pi$ 。

映射f的Schwarz-Christoffel可以由下式表示:

$$f(z) = A + C \int_{z_0}^z \prod_{j=1}^{n-1} (\zeta - z_j)^{\alpha_j - 1} d\zeta$$

式中

A: 偏移常数, 待求未知量;

C: 缩放常数, 待求未知量;

$z_j$ : 多边形 $\Gamma$ 的顶点在下半平面W的映射坐标, 为未知实常量。

考虑到方程组的个数取决于Z, 为 $i-1$ , 而未知量A, C,  $z_j$ 个数为 $i+1$ , 故通常指定除 $\infty$ 外的两个下半平面映射坐标。该公式在实际应用中的主要困难是, 除特殊情况外, 不能用解析的方法计算预顶点 $z_j$ 。由于M é obius变换有三个自由度, 所以包括已固定的Zn在内的三个预顶点可以任意选择。然后唯一地确定剩余的 $n-1$ 个预顶点, 并且可以通过解一个非线性方程组来获得。这就是所谓的Schwarz-Christoffel参数问题, 它的解决是任何Schwarz-Christoffel映射的第一步。一旦参数问题得到解决, 就可以求出乘法常数C, 并用数值计算f及其逆。目前已知Schwarz-Christoffel变换可以用来解决平面内的场问题, 如电流场、水流场、力场等。但是同样的该变换也会受到一些条件的限制使其无法适用, 如在流场的边界处物理规则发生改变时, 则该方法不适用。并且该变换只适合分析均质各项同性的平面, 而且场复数表达式需要满足场理论中的相关条件。

Schwarz-Christoffel变换已被证明可以有效地解决平面内的场问题, 例如电流场、水流场和力场等。然而这种变换也受到一些条件的限制, 例如在流场边界处物理规则发生变化时, 该方法可能不适用。此外, Schwarz-Christoffel变换仅适用于分析均匀、各向同性的平面, 且场复数表达式需要满足场理论中的相关条件。

### 2. 模拟流程与结果

一般流程如下:

(1) 根据需要指定两个下半平面的映射坐标为已知量, 列出Schwarz-Christoffel变换方程组F。

(2) 将Schwarz-Christoffel变换方程组利用已知的积分计算公式(如切比雪夫积分公式、高斯-雅克比比积分公式)进行近似, 以便于数值计算, 得近似方程组 $\tilde{F}$ 。

(3) 利用迭代方法(如牛顿法, 线性逼近法等)对方程组 $\tilde{F}$ 进行数值计算, 求出未知量A, C等。

(4) 根据已知的均匀水平无限大地内的已知电场规律, 写出要求取的电场参数的下半平面复函表达式, 求出该表达式下的w平面点坐标。

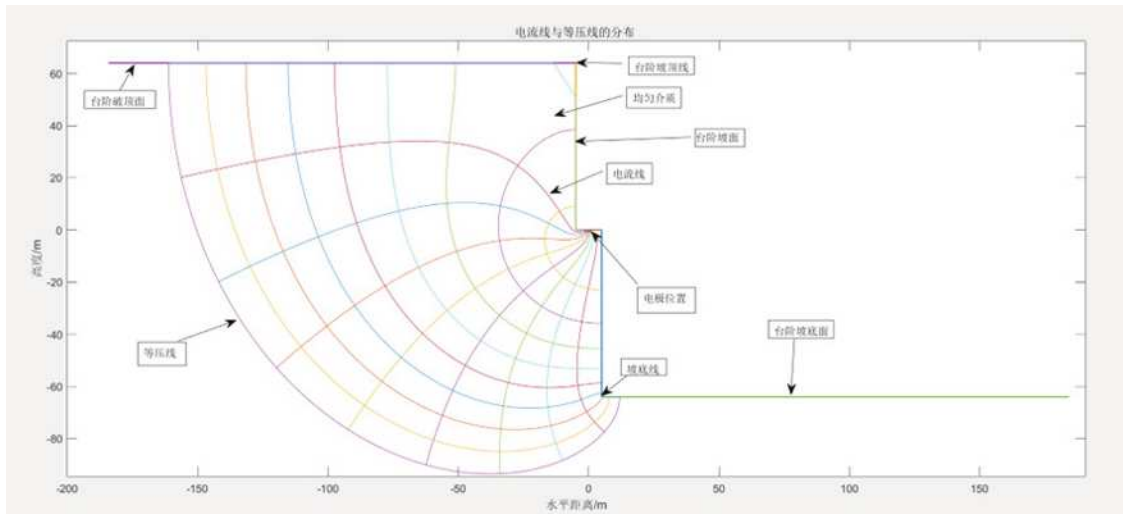


图2 台阶地形电流线与等压线的分布

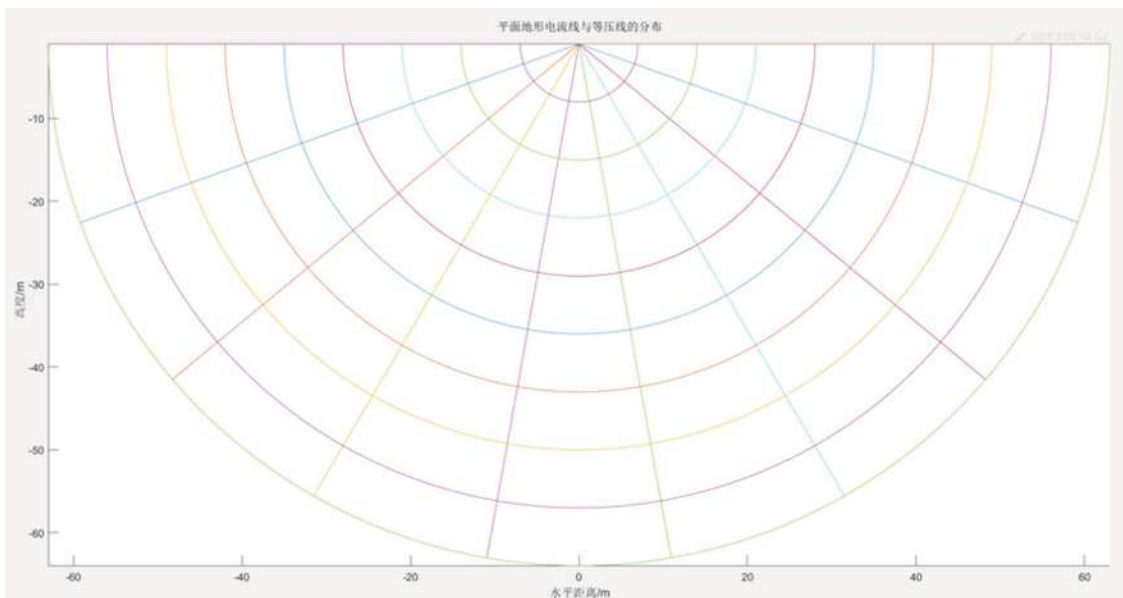


图3 平面地形电流线与等压线的分布

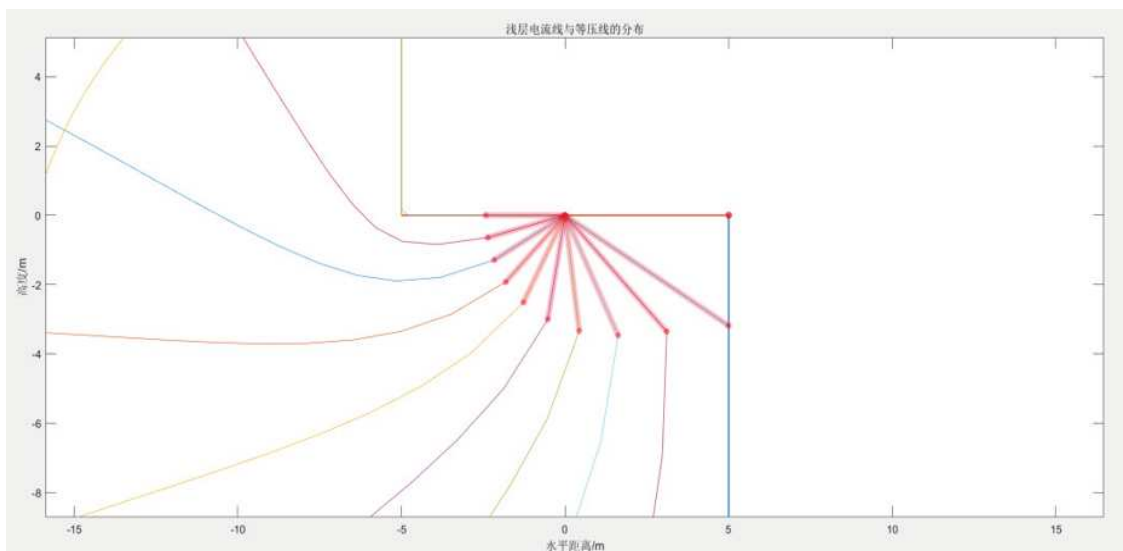


图4 台阶地形浅层电流线与等压线的分布

(5) 利用Schwarz-Christoffel变换方程组F计算出上述下半平面点坐标在z平面的点坐标,并按w平面内的原对应点的相互关系对映射点进行描点作图。

## 二、实验结果分析

在图5.4中可以看出,平面地形下的电流线呈均匀的射线状分布,等压线的分布则接近于半圆。在图5.5中,距离电极3m左右周围的电流还未受到地形影响而变形。电流线也呈均匀的射线状分布。这表明在露天矿清扫平台进行高密度电法勘探时,浅层的数据由于还未受到地形的影响,电流线没有发生扭曲,所以浅层的数据比较可靠准确。

而随着深度的增加,3m之后的电流线受到了台阶平台、台阶坡面的影响,发生了弯曲,整体的弯曲趋势为左上方弯曲,且越接近于坡底线的电流线弯曲程度越大。随着电流线像地面深度的扩散,弯曲程度逐渐变小,直至又恢复成射线状。这一现象表明电极附近3m后的数据失真较严重,会与真实的地下情况有一定的偏差。而随着探测深度的增加,电流线会逐渐恢复成均匀的射线状,即数据又恢复了准确性与可靠性。

在两级台阶的坡脚线位置,电流线与等压线都比其他位置密集。这表明台阶坡脚线位置的电流密度比较大,电流会在此聚集。

## 三、结论

1. 在平面地形下的电流场呈1/2圆形分布,而在露天矿台阶地形下的电流场的分布受到台阶坡面、台阶平台的影响通常接近于1/4圆。这造成了同等条件下台阶地形下的电流会比平面地形传播的更深。即同等条件时台阶地形

下的高密度电法勘探的测深要大于平面地形下的测深。

2. 在台阶地形下,由于电流受到来自台阶平台、坡脚、坡面的影响而扭曲,电流不能像平面地形下一样均匀的呈射线状传播。这种扭曲的规律为距离电极很近(约3m)以内的范围内电流的传播受地形影响较小,可以忽略,电流线仍呈射线状均匀传播。所探测的中部位置电流线弯曲严重,数据的失真最为严重。而电流线的末端又逐渐恢复成均匀的射线状,表明所测数据又逐渐恢复其准确性。

## 参考文献:

[1]Trefethen L N. Numerical computation of the Schwarz - Christoffel transformation[J]. SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 1980, 1(1): 82-102.

[2]O'Connell T C, Krein P T. A Schwarz - Christoffel-based analytical method for electric machine field analysis[J]. IEEE Transactions on Energy Conversion, 2009, 24(3): 565-577.

[3]Driscoll T A. Algorithm 756: A MATLAB toolbox for Schwarz-Christoffel mapping[J]. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 1996, 22(2): 168-186.

[4]Driscoll T A. Algorithm 843: improvements to the Schwarz-Christoffel toolbox for MATLAB[J]. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 2005, 31(2): 239-251.

[5]Davis R T. Numerical methods for coordinate generation based on Schwarz-Christoffel transformations[C]. Computational Fluid Dynamics Conference. 1979: 180-194.