

义务教育数学课标视域下数与整式的整体性教学

赵教练

渭南师范学院 数学与统计学院, 中国·陕西 渭南 714099

摘要: 数学学科的完整性是数学教学的基本原则。《义务教育数学课程标准(2022年版)》指出教师教学应该把握好数与式的整体性,以期对教师的教,学生的学提供借鉴和参考价值。

关键词: 整式; 课程标准; 整体性

Integrated Teaching of Numbers and Polynomials in Math Curriculum Standards

Zhao Jiaolian

School of Mathematics and Statistics, Weinan Normal University, China Shaanxi Weinan 714099

Abstract: The integrity of mathematics is a fundamental principle in mathematics teaching. The Mathematics Curriculum Standards for Compulsory Education (2022 Edition) emphasizes that teachers should grasp the holistic nature of numbers and algebraic expressions to provide valuable references for both teaching and learning.

Keywords: Polynomials; Curriculum standards; Holistic approach

1 背景

《义务教育数学课程标准(2022年版)》教学建议部分明确提出:整体把握教学内容。教师应重视教学内容的整体分析,帮助学生建立能体现数学学科本质、对未来学习有支撑意义的结构化的数学知识体系。^[1]在初中部分数与代数领域,学生需要体验用数学符号表达数量关系的过程,理解整式的概念,能进行简单的整式计算,了解根式的概念及其基本运算法则,了解分式的概念以及对简单的分式进行基本运算,基于代数式和代数式运算,建立符号意识,进一步理解字母表示数的意义。教学中,教师要将数与整式建立联系,应把握数与式的整体性。反观目前正式的教学,对于整式的认识与数的认识缺乏关联性,关于代数式的运算,整式有独特的运算法则,数与整式之间似乎缺乏整体性。

人类对于数的认识是代数式形成与发展的基础,代数式也是人类从一般化的角度认识数的产物,可以说代数式是依附于数而发展的。从最初用文字表示未知数直至用字母表示数,代数式的发展经历了三千多年,可以划分为修辞代数、缩略代数、符号代数三个阶段^[4],而整数、分数、

小数早已产生。整数、分数、小数都是基于计数单位而建构的^[5],其运算法则的本质也是计数单位之间的运算,代数式是每一类数的一般化形式,自然具备数的特征,那关于整式运算,完全可以用计数单位统领一致。

对于教师而言,明白了数与整式的整体性后,整式的教学不再是“无根之水”了,可以透过整式的现象观其本质,帮助学生建立数与整式之间的联系,体会数与整式的整体性。

2 数与整式概念的整体性

很多忽略了数与式的整体性的教学中,有一个特征:急切的让学生理解用字母表示数,产生的效果却差强人意^[6]。计数活动是数形成与发展的内驱力,整式便是人类对数的进一步认识得到的产物,认识整式的关键便是认识到代数式中的字母的工具性,体会到数与整式之间的整体性。

事实上,字母并不是表示数的唯一形式,汉字、图形甚至是肢体语言等都可以表示数,例如修辞代数时期是通过具体文字表示问题求解过程^[7],没有涉及任何的字母,而字母相比较其他表示形式更便捷所以发展至今,关于代数式的认识应该着重强调这一点,防止字母的出现反而弱

化数与式之间的联系。在代数式的教学中, 教师需要带领学生慢慢体会这种数学发展历程, 体验用数学符号表达数量关系的过程, 可以从一个例子出发: 两个数的和的一半加上它们差的一半等于较大的数(代数恒等式的表达)。

取 18 和 12, 和的一半是 15, 差的一半是 3, 15 与 3 的相加得到 18, 是较大数, 这个结果对于其他数对也是成立, 例如 24 和 8, 15 和 9 等, 利用小学学习的运算符号可得:

$$\begin{aligned}\frac{18+12}{2} + \frac{18-12}{2} &= 18, \\ \frac{24+8}{2} + \frac{24-8}{2} &= 24, \\ \frac{15+9}{2} + \frac{15-9}{2} &= 15,\end{aligned}$$

引导学生表达上述结果对于任何一组数对都成立, 就有:

$$\frac{\text{较大数}+\text{较小数}}{2} + \frac{\text{较大数}-\text{较小数}}{2} = \text{较大数}.$$

可以发现, 用文字表述这一过程是繁琐的, 若用 a 表示较大数, b 表示较小数, 上面的结果可以书写为

$$\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a.$$

对比二者表述, 字母表示数是可以简洁而高效的表达出一个对于任意数都成立的事实^[4], 相同的例子还有平方差公式、完全平方公式等。通过类似的例子, 说明字母是表示数的一个工具, 数是代数式下的特殊情况, 让学生进一步理解字母表示数的意义, 从而建立符号意识, 发展代数思维^[3]。

在理解了用字母表示数的本质后, 认识到字母的任意性, 整式的概念学习就变得不是那么突兀了, 可以从概念形成学习转化为概念同化学习^[6]。义务教育阶段, 关于代数式的学习只涉及整式、分式、二次根式。整式是由单项式和多项式组成, 教材中将单项式定义为像数与字母的乘积这样的式子, 并且强调了单独的一个数或一个字母也是单项式, 例如 a 、 mn 、 $3k$ 、 $2a^2$ 、100 等都属于单项式, 数是对数量的抽象, 单项式则是数的推广形式, 其中的字母

是可以代表任意一个数的, 明白了这一规则, 单项式的理解便可以结合数来说, a 表示任意一个数, mn 表示任意两个数相乘, $3k$ 表示 3 与任意一个数相乘, 这里的数字 3 称为系数, 需要注意的是, 其中字母在不同的问题情境下可能具有不同的含义。单项式可以看作数与字母、字母与字母、数与数的乘积, 那么数与字母、字母与字母、数与数之间的和差呢? 数的减法运算是可以转化为加法运算的^[5], 多项式定义为若干个单项式的和, 其中字母的表示含义也未发生变化, 例如 $3a+5b$ 则表示任意一个数的三倍与任意一个数的五倍相加, 仍然通过字母的任意性沟通了多项式与数之间的联系, 与单项式相比, 中间的运算符号由乘积改变为和。

综上, 数与整式概念的整体性体现为: 整式中的字母所表示的数是任意一个数, 通过字母这个媒介, 将数与整式组成一个系统^[2]。因此, 教师把握数与整式的整体性是把握字母的本质意义, 将数与整式的关联揭示清楚^[2]。纵观代数式的历史发展, 进步缓慢, 长达三千余年之久, 如果教师了解历史相似性^[9], 便不会急切的要求学生立刻明白代数式中字母与数之间的关系了。这样学习, 不仅与历史上代数式的发展一致, 并且体现了数与整式之间的整体性, 在渗透了数学文化的同时也体现了课程思政。

3 数的运算与整式运算的整体性

计数单位是针对个数与顺序的度量单位, 是度量单位的抽象化形式^[10], 整数的运算便是基于计数单位、运算法则、等式性质而运行的^[5]。整式是单项式与多项式的统称, 可以说是由字母、数字通过加、减、乘、除(除数不含字母)以及乘方等运算形式组合而成的代数式, 其中含有字母的每一个单项式都由系数和字母(变量)组成。从计数单位的角度出发, 首先, 整式的运算与数的运算都服从分配律、交换律等基本运算法则, 其次, 整式中的变量是计数单位的进一步抽象和泛化, 例如单项式 $3x$, 表示意义是 3 个 x , 其中 x 虽代表任意一个数, 但是仍然可以将 x 看作是一个计数单位, 系数 3 则表示特定计数单位下的数值大小, 那么整式运算也可以通过计数单位进行建构, 这何尝不是数与整式的整体性的体现呢?

整式的加减法应该从合并同类项谈起, 教材中对于同类项的定义是所含字母相同, 并且相同字母的指数也相同

的项叫作同类项,同类项的本质其实是计数单位一致的单项式,而整式的加减运算就是在合并同类项^[11]。例如 $3x^2$ 与 $2x^2$,这两项的计数单位都为 x^2 ,所以可以进行相加减。多项式与多项式或单项式与多项式的加减法也是遵循这一规则,找到相同的计数单位,将该计数单位前的系数进行加减运算,但是当计数单位不同时,是不可以进行相加减的。

整数的乘法运算可以被理解为个数与个数的积乘以计数单位与计数单位的积^[12],结果可能产生新的计数单位,例如 $20 \times 9 = 2 \times 9 \times 10 \times 1 = (2 \times 9 \times 10) \times 1 = 180$,这一算理同样适用于整式的乘法运算。整式的乘法可分为三部分,第一部分是单项式与单项式的乘法,例如 $3x \cdot 2y = 3 \times 2 \times x \times y = (3 \times 2) \times (x \times y) = 6xy$,系数便等同于个数,含有字母 x 、 y 的两个计数单位相乘可得到新的计数单位 xy 。在整式中,不同的字母相乘是直接写成乘积的形式,并且省略乘号,而相同的字母是写成幂的形式,例如 $a \cdot a = a^2$,需要明白的是,这两种乘积形式都是产生一个新的计数单位,这与数的乘法运算是具备一致性的。第二部分是单项式与多项式的乘法,值得注意的是,在数的运算中,有括号先算括号里的,而进行整式的运算时,因为括号内的计数单位的不同,无法进行加减运算,所以需要先去括号再进行运算,例如 $3x \cdot (2a + b)$,利用乘法分配律可知: $3x \cdot (2a + b) = 6xa + 3xb$,因为 xa 与 xb 的计数单位不同,故 $6xa + 3xb$ 无法继续运算,即 $3x \cdot (2a + b) = 6xa + 3xb$ 。第三部分是多项式与多项式的乘法运算,例如 $(2a + 3b) \cdot (4c + 5d)$,因为括号内的计数单位不同,所以按照乘法的分配律去括号可得

$$(2a + 3b) \cdot (4c + 5d) = 2a \cdot 4c + 2a \cdot 5d + 3b \cdot 4c + 3b \cdot 5d,$$

等式右边是四组单项式与单项式的乘积并进行相加,优先计算乘法再进行加法,最终可得出

$$(2a + 3b) \cdot (4c + 5d) = 2a \cdot 4c + 2a \cdot 5d + 3b \cdot 4c + 3b \cdot 5d \\ = 8ac + 10ad + 12bc + 15bd。$$

乘法与除法是互逆的关系,在一定程度上除法运算甚至是在乘法运算的基础上进行的^[13],整式的除法与整式的乘法并不例外。例如, $(8a^2 + 4a) \div 2a$ 按照以下步骤进行运算:利用除法分配律去除括号得到

$$(8a^2 + 4a) \div 2a = 8a^2 \div 2a + 4a \div 2a,$$

其中 $8a^2 \div 2a$ 与 $4a \div 2a$ 是单项式除以单项式的形式,与整式的乘法一致,基于计数单位进行建构,系数与系数进行相除,计数单位与计数单位进行相除,即可得到最终结果

$$(8a^2 + 4a) \div 2a = 8a^2 \div 2a + 4a \div 2a = 4a + 2。$$

其中涉及的 $a^2 \div a = a$ 可以转换为乘法进行推导,计算被除数除以除数所得的商,就是求一个数,使它与除数的积等于被除数^[14]。

综上所述,数与整式运算之间的整体性是可以由计数单位和基本运算法则建立联系。整式的加减法是找到相同的计数单位,将其系数进行加减,计数单位不发生变化;整式的乘除法是计数单位与计数单位相乘除,计数单位的个数与计数单位的个数相乘除,可能产生新的计数单位,其中会涉及乘法或除法基本运算法则以及优先去除括号等基本算理。

参考文献:

- [1] 杜胜利. 用普遍联系建构哲学理论诸范畴——关于物质、精神、人的本质内涵的新界定[J]. 延边大学学报(社会科学版), 2008(05):80-85. 2008.05.014.
- [2] 许卫兵. 关于“整体性思想”的整体性思考——基于《义务教育数学课程标准(2022年版)》的视角[J]. 福建教育, 2022(23):48-50.
- [3] 中华人民共和国教育部. 义务教育数学课程标准(2022年版)[S]. 北京: 北京师范大学出版社, 2022.
- [4] HPM: 数学史与数学教育[M]. 汪晓勤著. 科学出版社. 2017.
- [5] 巩子坤, 史宁中, 张丹. 义务教育数学课程标准修订的新视角: 数的概念与运算的一致性[J]. 课程·教材·教法, 2022, 42(06):45-51+56. 2022.
- [6] 徐文彬. 如何在算术教学中也教授代数思维[J]. 江苏教育, 2013(33):16-17.
- [7] 梁宗巨. 世界数学通史[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社, 2005.
- [8] 杨新宇, 李运华. 基于心理学分析的小学生数学概念学习模式[J]. 内蒙古师范大学学报(教育科学版), 2021, 34(01):151-156.
- [9] 蒲淑萍, 米雪. 学生对分数的理解: 历史相似性分析与教学研究[J]. 山东师范大学学报(自然科学版), 2023, 38(04):359-366.

[10] 娜仁格日乐, 史宁中. 度量单位的本质及小学数学教学[J]. 数学教育学报, 2018,27(06):13-16.

[11] 王梦婷. 代数式——数学认识上的一次飞跃[J]. 初中生世界, 2022(41):41-42.

[12] 赵莉, 吴正宪, 史宁中. 小学数学教学数的认识与运算一致性的研究与实践——以“数与运算”总复习为例[J]. 课程·教材·教法, 2022,42(08):122-129.2022.08.022.

[13] 吴正宪, 梁艳, 张秋爽, 等. 溯本求源 融会贯通——“加、减、乘、除运算的复习”教学实践与思考[J]. 小学数学教育, 2021(09):64-67.

[14] 相子凡. 乘法和除法的关系[J]. 小学生学习指导,

2020(Z2):48-49.

[15] 郭玉峰. 关注数学的整体性和关联性[J]. 数学通报, 2024,63(03):1-5.

基金项目：“双减”背景下中学数学课堂提质增效实践策略研究，陕西教育科学规划课题（SWNZ2404）；利用系统观念提升中学数学教育教学质量机制与策略研究（2022JYKX46）；渭南市初中数学师资调研现状，渭南师范学院教育科学研究课题（2019JYKX002）。

作者简介：赵教练（1979.11-），男，教授，研究方向：数学教育。